

# Listefarvning af grafer

Martin A. Bøgelund

28. marts 2001



# Tak

Jeg ønsker først og fremmest at takke Bjarne Toft, Institut for Matematik og Datalogi på Odense Universitet, ikke kun for hans støtte, råd, vejledning, mange oplysende forklaringer, og tålmodighed i forbindelse med udarbejdelsen af nærværende speciale, men også for tilsvarende indsats i forbindelse med min tilegnelse af grafteorien i kurserne Grafteori I og Grafteori II ved Institut for Matematik og Datalogi på Odense Universitet.

Også en tak til Margit Voigt for en forklarende e-mail i forbindelse med hendes artikel [12].

Sidst, men ikke mindst, en tak til min kone Susana for støtte, kakao, og tålmodighed.



# Indhold

<b>Indledning</b>	<b>vii</b>
<b>1 Indledende definitioner og resultater</b>	<b>1</b>
1.1 Listefarvningsbegrebet . . . . .	1
1.2 $\theta$ -grafer og Gallaigrafer . . . . .	2
<b>2 Brooks' sætning</b>	<b>15</b>
2.1 Brooks' oprindelige sætning . . . . .	15
2.2 Udvidelse af Brooks' Sætning . . . . .	17
<b>3 Mindste 2-kromatiske grafer med højt listekromatisk tal.</b>	<b>19</b>
3.1 Bestemmelse af $N(2, 3)$ . . . . .	20
3.2 Fano Plan konstruktionen . . . . .	30
3.3 Éntydedighed af Fano Plan Konstruktionen? . . . . .	34
<b>4 Listefarvning af plane grafer</b>	<b>41</b>
4.1 5-listefarvelighed af planare grafer . . . . .	41
4.2 En algoritme bygget over C. Thomassens bevis . . . . .	43
4.3 Et eksempel på en ikke-4-listefarvelig, plan graf . . . . .	49
<b>5 Listefarvning og polynomier</b>	<b>55</b>
5.1 Acykliske orienteringer og listefarvning . . . . .	55
5.2 Eulerske orienteringer . . . . .	56
5.3 Hovedsætningen, et resultat af Alon og Tarsi . . . . .	57

5.4	En anvendelse af Alon-Tarsis resultat . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Kant-listefarvning. Galvins Sætning.</b>	<b>73</b>
6.1	Galvins Sætning . . . . .	73
6.2	En skærpelse af Galvins Sætning . . . . .	77
6.3	Totalfarvning . . . . .	81
<b>7</b>	<b>Uløste problemer og konklusion</b>	<b>85</b>
7.1	To relaterede problemer omkring $(am : m)$ -listefarvelighed . . . . .	85
7.2	Listefarvningsfomodningen . . . . .	87
7.3	Er $\chi''(G) = \chi''(G)$ ? . . . . .	87
7.4	Forholdet mellem farvnings- og listefarvningsproblemer. Et oplæg til konklusionen . . . . .	88
7.5	Konklusion . . . . .	90
	<b>Notation og symbolliste</b>	<b>91</b>

# Indledning

For at læse og forstå dette speciale, anbefales det at læseren har tilegnet sig en viden om grafteori der mindst svarer til kurserne Grafteori I og Grafteori II som udbudt ved Institut for Matematik og Datalogi på Odense Universitet.

Notationen vil som hovedregel følge notationen som givet i [10], men der kan forekomme notation der afviger herfra, som regel pga. en til tilfældet mere passende notation i de anvendte artikler. Den anderledes notation vil dog i disse tilfælde blive præsenteret for læseren. Omme bag i specialet findes også en kort symbolliste som læseren kan konsultere, ikke kun i tvivlstilfælde, men også for at koordinere med sin vanlige notation. Alene for det listekromatiske tal kan man således støde på notationer som  $\chi_l(G)$ ,  $\chi_{list}(G)$ ,  $ch(G)$ , og den her anvendte  $\hat{\chi}(G)$ .

Specialet menes at dække bredt, og kommer bl.a. ind på Brooks' Sætning, Eulerske orienteringer, Plane grafer, og uløste problemer. Der fortælles også om kant-liste-farvninger og kort om total-liste-farvninger.

Litteraturhenvisninger findes bagest i specialet.





# Kapitel 1

## Indledende definitioner og resultater

### 1.1 Listefarvningsbegrebet

Inspireret af [1] og Definition 8.4.22 i [10], følger de i dette speciale benyttede definitioner af nogle grundlæggende listefarvningsbegreber.

**Definition 1.1.1.** Lad  $G$  være en graf med  $n$  punkter,  $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ . Lad der til alle punkter  $v \in G$  være knyttet en liste af farver,  $S(v)$ . En tildeling af præcis ét element  $c_v \in S(v)$  til punktet  $v$  for alle  $v \in G$  kaldes en *listefarvning* af grafen  $G$  mht. de givne lister  $S(v)$  hvis der gælder at  $vu \in E(G) \Rightarrow c_v \neq c_u$  for alle kanter  $vu$  i  $G$ .

For en konstant  $k$  kaldes  $G$  *k-listefarvelig* hvis det for enhver tildeling af lister med  $k$  elementer til hvert punkt  $v \in G$  er muligt at listefarve  $G$ . Det *listekromatiske tal*  $\hat{\chi}(G)$  er det mindste  $k$  så at  $G$  er  $k$ -listefarvelig.

For en funktion  $f : V(G) \rightarrow \mathbf{N}$  kaldes  $G$  *f()-listefarvelig* hvis det for enhver tildeling af lister med  $f(v)$  elementer til hvert punkt  $v \in G$  er muligt at listefarve  $G$ .

*Note 1.1.2.* Den tomme parentes i “ $f()$ -listefarvelig” er medtaget for at understrege at  $f$  er en funktion, i modsætning til at være

en konstant. Dette er praktisk i visse situationer, idet man f. eks. ofte i forbindelse med listefarvelighed benytter bogstavet “d” både som konstant, og som funktion, såsom i valensfunktionen  $d(v) = d_G(v) =$  valensen af  $v$  i  $G$ . Udtrykkene “ $d$ -listefarvelig” og “ $d()$ -listefarvelig” viser således med det samme hvad der tales om.

Listefarvning ses at være en udvidelse af den almindelige farvning, thi en  $k$ -farvning af grafen  $G$  kan opfattes som en listefarvning af  $G$ , hvor alle listerne knyttet til punkterne i  $G$  er den samme  $k$ -mængde. Heraf ses det let at  $\chi(G) \leq \widehat{\chi}(G)$  for alle grafer  $G$ .

## 1.2 $\theta$ -grafer og Gallaignrafer

Et nyttigt lemma der skal bruges i det følgende, se [1], er

**Lemma 1.2.1.** *Lad  $G$  være en sammenhængende graf og lad  $H \subseteq G$  være en ikke-tom<sup>1</sup>, induceret delgraf af  $G$ .*

*Da gælder*

$$H \text{ er } d_H()\text{-listefarvelig} \Rightarrow G \text{ er } d_G()\text{-listefarvelig.}$$

*Bevis.* En graf er  $d()$ -listefarvelig hvis og kun hvis alle dens sammenhængskomponenter er  $d()$ -listefarvelige. Da udsagnene “ $G$  indeholder en induceret,  $d()$ -listefarvelig delgraf  $H$ ” og “ $G$  indeholder en *sammenhængende*, induceret,  $d()$ -listefarvelig delgraf  $H$ ” således er ækvivalente, kan man nøjes med at bevise lemmaet for sammenhængende, inducerede delgrafer  $H$ .

Der anvendes induktion over antallet af punkter i  $G - H$ ,  $m = n(G - H)$ . For  $n = 0$  er udsagnet trivielt, thi  $H = G$ , og  $H$  er  $d()$ -listefarvelig. Antag nu at udsagnet gælder for alle  $m \leq k - 1$  og lad  $m = k$ . Lad  $x \in V(G) - V(H)$ , hvor  $x$  har maximal afstand fra  $H$  i  $G$ . Den maksimale afstand garanterer at  $G - x$  er sammenhængende. Farv nu  $x$  med en vilkårlig farve fra  $x$ 's liste, og slet denne farve fra listerne hørende til  $x$ 's naboer hvis den

<sup>1</sup>Den tomme graf er den éntydige graf  $\emptyset_{graf}$  med  $V(\emptyset_{graf}) = \emptyset$  og  $E(\emptyset_{graf}) = \emptyset$ .

forekommer der, og slet en vilkårlig farve fra de af  $x$ 's naboers lister hvor den ikke forekommer.  $d()$ -listefarvningen af  $G$  kan nu fuldføres ifølge induktionsantagelsen.  $\square$

*Note 1.2.2.* Kravet om at  $H$  ikke er den tomme graf er nødvendigt, idet den tomme graf er en (induceret) delgraf af alle grafer, og sætningen således ville klassificere *alle* grafer som værende  $d()$ -listefarvelige, istedet for kun en bestemt klasse af grafer. Kravet om ikke-tomhed af  $H$  nævnes iøvrigt ikke i det originale lemma på side 142 i [1].

*Note 1.2.3.* Alternativt til at vise at udsagnene

- $G$  indeholder en induceret delgraf  $H$  som er  $d_H()$ -listefarvelig, og
- $G$  indholder en sammenhængende, induceret delgraf  $H$  som er  $d_H()$ -listefarvelig

er ækvivalente, kunne man vise at hvis delgrafen  $H$  ikke var sammenhængende, ville  $G - x$  eventuelt have flere sammenhængskomponenter<sup>2</sup>, og at der ville være mindst én (ikke-tom) sammenhængskomponent fra  $H$  i hver sammenhængskomponent i  $G - x$ . Herefter kunne induktionsantagelsen anvendes på hver sammenhængskomponent i  $G - x$ .  $H$  kræves ikke at være sammenhængende i det oprindelige lemma i [1], og der tages ikke hensyn til at  $G - x$  kan være ikke-sammenhængende pga. dette.

Hvis man vil afgøre om en graf  $G$  er listefarvelig kan man således nøjes med at finde en induceret delgraf i  $G$  der er  $d()$ -listefarvelig. Den mindste (ikke-tomme)  $d()$ -listefarvelige graf er

---

<sup>2</sup>Betragt tilfældet hvor  $G$  består af et punkt  $v$  og 2 disjunkte 4-kredse,  $C_4^1$  og  $C_4^2$ , hver forbundet til  $v$  med en kant.  $H$  kunne så bestå af  $C_4^1 \cup C_4^2$ , og eneste punkt som er kvalificeret til at være punktet  $x$  med maximal afstand til  $H$  er  $v$ .  $G - x$  vil i dette tilfælde ikke være sammenhængende.

$C_4$ , og generelt er alle lige kredse og alle  $\theta$ -grafer (se Definition 1.2.4)  $d()$ -listefarvelige grafer med en simpel struktur.

**Definition 1.2.4.** En  $\theta$ -graf er en simpel graf der består af 2 punkter,  $i$  og  $j$ ,  $i \neq j$ , samt af præcis 3 indre-disjunkte veje der forbinder  $i$  og  $j$ , og  $i$  og  $j$  har begge valens 3, mens resten af punkterne i  $\theta$ -grafene har valens 2. En  $\theta$ -graf kan således specificeres ved de 3 stilængder med notationen  $\theta_{a,b,c}$ ,  $1 \leq a \leq b \leq c$ , eller med de 3 stilængder og endepunkterne  $i$  og  $j$  med notationen  $\theta_{a,b,c}(i, j)$ ,  $1 \leq a \leq b \leq c$ .

Det næste lemma bygger på [3].

**Lemma 1.2.5.** *Lad  $G$  være en graf. Da er følgende udsagn ækvivalente:*

*Alle  $G$ 's blokke er ulige kredse og/eller komplette grafer.* (1.1a)

*Enhver induceret lige kreds i  $G$  har alle sine diagonaler.* (1.1b)

*Enhver induceret lige kreds i  $G$  har en diagonal fra ethvert af sine punkter.* (1.1c)

*Enhver induceret lige kreds i  $G$  har mindst 2 diagonaler.* (1.1d)

*$G$  indeholder ingen induceret lige kreds uden diagonaler, og ingen induceret  $\theta$ -graf.* (1.1e)

*Bevis.* (1.1a)  $\Rightarrow$  (1.1b): En lige kreds i  $G$  kan kun befinde sig i en blok der er en komplet graf. En induceret lige kreds i  $G$  vil således have alle sine diagonaler.

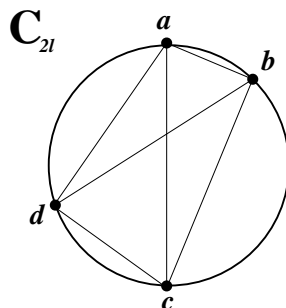
(1.1b)  $\Rightarrow$  (1.1c): Trivial.

(1.1c)  $\Rightarrow$  (1.1d): Diagonaler fra nabopunkter på en kreds er forskellige. Er der derfor diagonaler fra alle punkter i en kreds, må der derfor også være 2 forskellige diagonaler.

(1.1d)  $\Rightarrow$  (1.1b): Pr. induktion efter kredslængden  $2l$ , hvor kredsen vides at have (mindst) 2 diagonaler. For  $2l = 4$  inducerer kredsen en  $K_4$  som har alle sine diagonaler. Antag at påstanden er sand for alle lige kredse af længde højst  $2l - 2$ , og at  $2l \geq 6$ . Der deles op i 3 tilfælde:

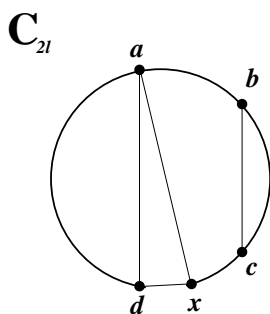
**1. tilfælde:** (Se figur 1.1). Endepunkterne i én af diagonalerne ( $ac \in E(G)$ ) deler kredsen i 2 ulige veje ( $\{a, \dots, c\}$  med uret og  $\{a, \dots, c\}$  mod uret) som sammen med delve diagonalen  $ac$  danner 2 lige kredse med længder skarpt mindre end  $2l$ . Induktionsantagelsen kan således anvendes på de 2 mindre kredse til at opnå diagonalerne  $ab, bc, ad$  og  $dc$ , for alle valg af  $b, d \in C_{2l} - \{a, c\}$ . Disse danner den lige kreds  $\{a, b, c, d\}$ , hvorved diagonalen  $bd$  opnås. Da denne process kan gentages for alle  $b$  og  $d$  på kredsen, har  $C_{2l}$  alle sine diagonaler i dette tilfælde.

**2. tilfælde:** (Se figur 1.2) Diagonalernes endepunkter ( $a, d$  og  $b, c$ ) er placeret således at hver diagonal deler kredsen i to mindre, ulige kredse, diagonalerne krydser ikke hinanden og kan evt. have ét fælles endepunkt;  $\{a, \dots, d\} \cup \{a, d\}$ ,  $\{d, \dots, a\} \cup \{a, d\}$ ,  $\{b, \dots, c\} \cup \{b, c\}$ , og  $\{c, \dots, b\} \cup \{b, c\}$ , hvor alle vejene går med uret. Bemærk at der eventuelt kan gælde at  $a = b$ . Vejene  $\{a, \dots, b\}$  og  $\{c, \dots, d\}$  må have samme paritet, idet f.eks. en ulige  $ab$ -vej sammen med en lige  $cd$ -vej



Figur 1.1: Tilfældet hvor mindst én af diagonalerne ( $ac$ ) deler  $C_{2l}$  i 2 mindre, lige kredse.

ville betyde at  $bc$ -vejen ville være ulige fordi  $ad$ -vejen er lige, hvilket er imod antagelsen. Pga. de éns pariteter danner  $ab$ -vejen og  $cd$ -vejen sammen med diagonalerne  $ad$  og  $bc$  en lige kreds med længde skarpt mindre end  $2l$  (da der mindst er ét punkt på hver af  $bc$ - og  $da$ -vejene). Induktionsantagelsen giver os da diagonalen  $ax$ , hvor  $x$  er  $d$ 's nabo og det næstsidste punkt i  $cd$ -vejen. Da  $ad$  deler den oprindelige kreds i to *ulige* kredse vil  $ax$  dele den i to *lige* kredse, og resten af diagonalerne fås vha. tilfælde 1.



Figur 1.2: Tilfældet hvor begge diagonalerne ( $ad$  og  $bc$ ) deler  $C_{2l}$  i 2 mindre, ulige kredse, og hvor diagonalerne ikke krydser hinanden. Bemærk at der eventuelt kan gælde  $a = b$ .

**3. tilfælde:** (Se figur 1.3) De to diagonaler krydser hinan-

den og begge deler hver for sig kredsen i 2 mindre, ulige kredse. Betragt kredsene

$$L_1 = \{a, \dots, b\} \cup \{b, d\} \cup \{d, \dots, c\} \cup \{c, a\} \text{ og}$$

$$L_2 = \{b, \dots, c\} \cup \{c, a\} \cup \{a, \dots, d\} \cup \{d, b\}.$$

**Påstand 1:**  $L_1$  og  $L_2$  er *lige* kredse.

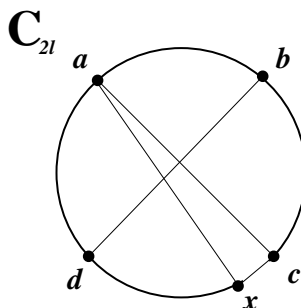
**Påstand 2:**  $|L_1| < 2l$  eller  $|L_2| < 2l$ , evt. begge.

Bevis for Påstand 1. Da vejen  $\{a, \dots, b, \dots, c\}$  er lige (idet kredsen  $\{a, \dots, c\} \cup \{c, a\}$  er ulige), må længderne af vejene  $\{a, \dots, b\}$  og  $\{b, \dots, c\}$  have samme paritet. På samme måde ses at vejlængderne for  $\{b, \dots, c\}$  og  $\{c, \dots, d\}$  har samme paritet og at vejlængderne for  $\{c, \dots, d\}$  og  $\{d, \dots, a\}$  har samme paritet. Dvs. vejlængderne for  $\{a, \dots, b\}$  og  $\{c, \dots, d\}$  har samme paritet, og vejlængderne for  $\{b, \dots, c\}$  og  $\{d, \dots, a\}$  har samme paritet. Sammen med diagonalerne  $ac$  og  $bd$  danner disse veje kredsene  $L_1$  og  $L_2$ . Da  $L_1$  og  $L_2$  således består af to veje med længder af samme paritet og to kanter der forbinder endepunkterne på disse, er  $L_1$  og  $L_2$  lige kredse. Dette beviser Påstand 1.

Bevis for Påstand 2. Vi har at  $|L_1| + |L_2| = 2l + 4$ . Dvs. at  $\exists i \in \{1, 2\} : |L_i| \leq l + 2 < 2l$ , idet  $l > 2$ . Dette beviser Påstand 2.

Det kan antages at  $|L_1| < 2l$ . Induktionsantagelsen kan hermed benyttes til at opnå en diagonal ( $ax$  på figur 1.3) mellem  $a$  og  $c$ 's nabo  $x$  på vejen  $\{d, \dots, c\}$  (mod uret). Da  $ac$  deler den oprindelige kreds i to *ulige* kredse vil  $ax$  dele den i to *lige* kredse, og resten af diagonalerne i den oprindelige kreds fås vha. tilfælde 1.

(1.1b)  $\Rightarrow$  (1.1a): Antag at enhver lige kreds i  $G$  har alle sine diagonaler. Det skal vises at  $G$ 's blokke er ulige kredse og/eller komplette grafer. Hvis  $G = K_1$  følger påstanden trivielt, så



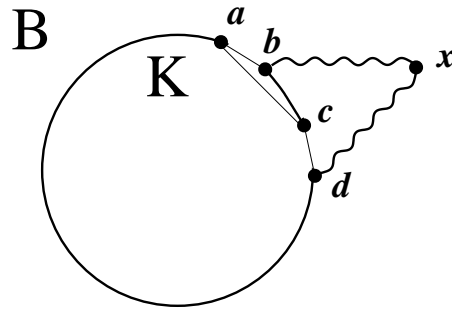
Figur 1.3: Tilfældet hvor begge diagonalerne ( $ac$  og  $bd$ ) deler  $C_{2l}$  i 2 mindre, ulige kredse, og hvor diagonalerne krydser hinanden.

antag at  $G$  har mindst én kant. Lad  $B$  være en vilkårlig blok i  $G$ . Hvis  $B$  kun indeholder én kant er  $B = K_2$ . Hvis  $B$  indeholder mere end én kant, vil  $B$  indeholde en kreds da en blok er 2-sammenhængende. Lad  $K$  være en længste kreds i  $B$ . Der kan nu deles op efter om  $K$  er en lige kreds, en ulige kreds uden diagonaler, eller en ulige kreds med en diagonal.

**1. tilfælde:** (Se figur 1.4.)  $K$  er en lige kreds. Da  $K = \{a, b, \dots, c, d, \dots, a\}$  er en lige kreds, har den alle sine diagonaler, så  $K$  inducerer en komplet graf. Hvis der var et andet punkt i  $B$  end punkterne i  $K$  ( $x$  i figur 1.4) ville dette punkt være forbundet til 2 punkter,  $b, d \in K$ , som ikke er naboer på  $K$ , da  $K$  ellers ikke ville være en længste kreds.  $b$ 's nabo  $a$  på  $K$  i retning mod uret ville være forbundet med  $d$ 's nabo  $c$  på  $K$  i retning mod uret da  $K$  inducerer en komplet graf. Men så ville kredsen  $\{b, \dots, x, \dots, d, \dots, a, c, \dots, b\}$  være længere end  $K$ , hvilket er i modstrid med valget af  $K$ . Hvis en længste kreds  $K$  i  $B$  er en lige kreds, er  $B$  således en komplet graf induceret af  $K$ 's punkter.

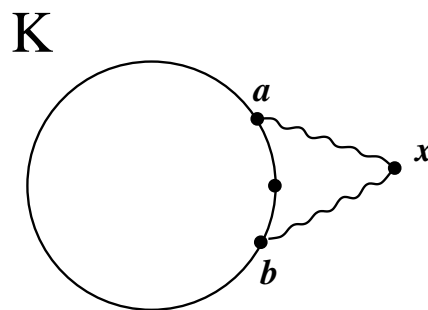
**2. tilfælde:** (Se figur 1.5.)  $K$  er en ulige kreds uden diagonal. Hvis  $B$  kun består af  $K$  er  $B$  en ulige kreds og vi





Figur 1.4:  $K$  er en længste kreds i blokken  $B$ . Hvis der var andre punkter i  $B$  end  $K$ 's punkter, ville kredsen  $\{b, \dots, x, \dots, d, \dots, a, c, \dots, b\}$  være længere end  $K$ , altså en modstrid.

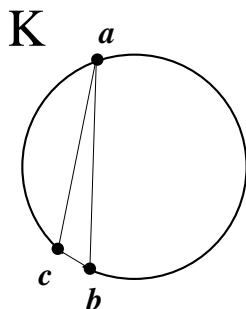
er færdige. Hvis  $B$  indeholder andet end  $K$ , lad os sige punktet  $x$ , vil der være 2 disjunkte veje,  $\{x, \dots, a\}$  og  $\{x, \dots, b\}$ , fra  $x$  til  $K$ . Disse veje vil sammen med et af kredssegmenterne  $\{a, \dots, b\}$  med eller mod uret, danne en lige kreds. Denne lige kreds vil ifølge antagelsen have alle sine diagonaler, specielt diagonalen  $ab$ . Dette er en modstrid med antagelsen om  $K$ , så  $B = K$ .



Figur 1.5:  $K$  er en længste kreds i blokken  $B$ , og  $K$  er ulige. Hvis der var andre punkter i  $B$  end  $K$ 's punkter, ville  $K$  have en diagonal.

**3. tilfælde:** (Se figur 1.6.)  $K$  er en ulige kreds med en diagonal. Kald diagonalens endepunkter  $a$  og  $b$ . Denne diagonal vil dele  $K$  i 2 mindre kredse, hvoraf den ene vil være lige og dermed have alle sine diagonaler iflg. in-

duktionsantagelsen og er således en komplet graf. Denne komplette grafs diagonaler deler  $K$  i andre lige og ulige kredse der er mindre end  $K$  og man kan således vha. induktionsantagelsen påvise samtlige diagonalers eksistens i  $K$  så at  $K$  inducerer en komplet graf. Hvis blokken  $B$  indeholder andre punkter end dem på  $K$ , vil man på samme måde som i 1. tilfælde kunne påvise en kreds i  $B$  der er længere end  $K$ , hvilket er i modstrid med antagelsen om  $K$ .  $B$  vil derfor i dette tilfælde bestå af en komplet graf induceret af  $K$ 's punkter.



Figur 1.6:  $K$  er en længste kreds i blokken  $B$ ,  $K$  er ulige og har en diagonal som deler  $K$  i en lige og en ulige kreds.

(1.1d)  $\Rightarrow$  (1.1e): At (1.1d) medfører at  $G$  ikke indeholder en induceret, diagonalfri kreds er trivielt. Det skal altså vises at  $G$  ikke indeholder en induceret  $\theta$ -graf. Antag derfor at  $G$  indeholder en  $\theta$ -graf,  $\theta_{a,b,c}$ , hvor de 3 veje med længder  $a, b$  og  $c$  kaldes hhv.  $A, B$  og  $C$ . To af de tre veje  $A, B$  og  $C$  vil sammen udgøre en induceret lige kreds i  $G$ , idet to af længderne  $a, b$  og  $c$  enten vil være lige eller ulige. Antag uden tab af generalitet at  $B$  og  $C$  tilsammen udgør en induceret lige kreds,  $B \cup C$ , i  $G$ .  $B \cup C$  vil derfor have 2 diagonaler i  $G$ , hvoraf den ene muligvis er  $A$ . Den anden diagonal må have endepunkter i  $B \cup C$ , hvilket medfører at disse 2 endepunk-

ter vil have for høj valens til at være i den inducerede  $\theta$ -graf  $\theta_{a,b,c}$ . Eksistensen af en induceret  $\theta$ -graf i  $G$  under forudsætning af (1.1d) er således umulig, og implikationen er bevist.

(1.1e)  $\Rightarrow$  (1.1d): Trivielt, idet første del af (1.1e) medfører at enhver induceret lige kreds må have mindst 1 diagonal, og idet enhver induceret kreds med præcis 1 diagonal er en  $\theta$ -graf.  $\square$

**Definition 1.2.6.** En graf der opfylder én af 1.1a - 1.1e og dermed dem alle, kaldes en Gallaigraf.

En variant af Lemmaet s. 140 i [1] skal benyttes til at vise at Gallaigrafen ikke er  $d()$ -listefarvelige.

**Lemma 1.2.7.** *Lad  $G$  og  $H$  være grafer med  $V(G) \cap V(H) = \{v\}$ . Så gælder*

$$\begin{cases} G \text{ ikke } d_G() \text{ - listefarvelig,} \\ H \text{ ikke } d_H() \text{ - listefarvelig.} \end{cases} \quad (1.2)$$

$\Downarrow$

$$G \cup H \text{ ikke } d_{G \cup H}() \text{ - listefarvelig.} \quad (1.3)$$

*Bevis.* Lad der være givet  $L_G(x)$ ,  $\forall x \in V(G)$  og  $L_H(y)$ ,  $\forall y \in V(H)$ ,  $L_G(v) \cap L_H(v) = \emptyset$  som umuliggør en  $d_G()$ -listefarvning af  $G$  hhv. en  $d_H()$ -listefarvning af  $H$ . Tildel lister til punkterne i  $G \cup H$  således:

$$L_{G \cup H}(u) = \begin{cases} L_G(u), & \text{for } u \in V(G) - \{v\} \\ L_H(u), & \text{for } u \in V(H) - \{v\} \\ L_G(u) \cup L_H(u), & \text{for } u = v. \end{cases}$$

$G \cup H$  kan ikke  $d_{G \cup H}()$ -listefarves, thi en tildeling af en farve til  $v$  fra  $L_G(v)$  vil umuliggøre en  $d_{G \cup H}()$ -listefarvning af  $G$ -delen af grafen, og en tildeling af en farve til  $v$  fra  $L_H(v)$  vil umuliggøre en  $d_{G \cup H}()$ -listefarvning af  $H$ -delen af grafen.  $\square$

**Sætning 1.2.8.** *Gallaigrafer er ikke  $d()$ -listefarvelige*

*Bevis.* Induktion efter antallet af blokke,  $b$ , i Gallaigrafen  $G$ .

For  $b = 1$  er  $G$  enten en ulige kreds eller en komplet graf, hvor der i begge tilfælde gælder at  $d_G(x) = \Delta(G)$  for alle  $x \in G$ .

Hvis  $G$  er en ulige kreds er  $d_G(x) = 2$ , og med lister  $S(x) = \{1, 2\}$  for alle  $x \in G$ , ses  $G$  ikke at være listefarvelig mht. listerne  $S(x)$ ,  $x \in G$ . Hvis  $G$  er en komplet  $m$ -graf,  $K_m$ , er  $d_G(x) = m - 1$  for alle  $x \in G$ , og  $G$  ses ikke at være listefarvelig mht. listerne  $S(x) = \{1, 2, \dots, m - 1\}$  for alle  $x \in G$ . (1.1a) i Lemma 1.2.5 giver således at hvis Gallaigrafen  $G$  kun har én blok, er  $G$  ikke  $d_G()$ -listefarvelig.

Sætningen antages at være sand for Gallaigrafer med færre end  $b$  blokke,  $b \geq 2$ . Hvis Gallaigrafen  $G$  har  $b \geq 2$  blokke, vil  $G$  have (mindst) et snitpunkt og kan deles i 2 grafer  $G'$  og  $G''$  med præcis ét fælles punkt  $v$ , på samme måde som i Lemma 1.2.7. Idet  $G'$  og  $G''$  er Gallaigrafer og dermed ikke er hhv.  $d_{G'}$ - og  $d_{G''}$ -listefarvelige pr. induktion, er  $G$  ikke  $d_G$ -listefarvelig iflg. Lemma 1.2.7. Dette beviser sætningen.  $\square$

En “omvendt” version af Sætning 1.2.8, at en sammenhængende graf der ikke er  $d()$ -listefarvelig er en Gallaigraf, gælder også. Dette resultat ses af den næste sætning.

**Sætning 1.2.9.** *Lad  $G$  være en vilkårlig graf. Da gælder følgende ækvivalens:*

$$\text{Ingen sammenhængskomponent i } G \text{ er en Gallaigraf} \quad (1.4)$$

$\Updownarrow$

$$G \text{ er } d() \text{ - listefarvelig} \quad (1.5)$$

*Bevis.* Antag først at ingen sammenhængskomponent i  $G$  er en Gallaigraf. Dvs. at alle sammenhængskomponenter ifølge (1.1e) indeholder enten en induceret lige kreds eller en induceret  $\theta$ -graf. Disse to former for grafer er  $d()$ -listefarvelige, dvs. ifølge

Lemma 1.2.1 er deres sammenhængskomponenter og dermed hele  $G$   $d()$ -listefarvelig. Antag nu at  $G$  er  $d()$ -listefarvelig. Så er enhver sammenhængskomponent i  $G$  også  $d()$ -listefarvelig. Men så kan ingen af  $G$ 's sammenhængskomponenter være Gallaigrafer, idet disse ifølge Sætning 1.2.8 ikke er  $d()$ -listefarvelige.  $\square$

**Lemma 1.2.10.** *De eneste regulære, sammenhængende Gallaigrafer er de ulige kredse og de komplette grafer.*

*Bevis.* Lad  $G$  være en regulær, sammenhængende Gallai-graf. Antag at  $G$  ikke er en ulige kreds eller en komplet graf, dvs.  $G$  har mindst 2 blokke og mindst ét snitpunkt. Bemærk at enhver blok indeholder mindst 2 punkter.

Hvis hver blok i  $G$  indeholder mindst 2 punkter der er snitpunkter i  $G$  vil  $G$  være 2-sammenhængende, hvilket er i modstrid med antagelsen om antallet af blokke i  $G$ .  $G$  vil således have mindst én blok  $B$  med kun 1 punkt,  $v$ , der er et snitpunkt i  $G$  (Det kan faktisk vises at  $G$  vil indeholde mindst 2 sådanne blokke, se f.eks. leaf block argumentet i [10], side 140).

$v$  vil således have skarpt større valens (i  $G$ ) end resten af punkterne i  $B$ , hvilket er i modstrid med antagelsen om at  $G$  er regulær.  $G$  kan dermed kun have 1 blok og er derfor enten en komplet graf eller en ulige kreds.  $\square$

Historisk:

Princippet i listefarvning af grafer, at knytte en liste af farver til hvert punkt  $v$  i en graf  $G$ , hvorfra en farve skal vælges ved farvning, blev udviklet uafhængigt af Erdős, Rubin og Taylor i 1979 i [1], og af V. G. Vizing i “Vertex colourings with given colour (Russisk)”, *Diskret. Analiz.*, 29 (1976), 3-10. Vizing blev ført til listefarvning via totalfarvning. En totalfarvning af en graf er en farvning af både punkterne og kanterne i grafen, hvor adjacente elementer altid får forskellige farver. Ønskes en totalfarvning med  $k$  farver kan man først punktfarve grafen for derefter for hver kant  $xy$  at fjerne farverne af  $x$  og  $y$  fra de mulige farver for  $xy$ . Dvs. man opnår et liste-kantfarvningsproblem med lister af længde  $k - 2$  for hver kant.

Erdős, Rubin og Taylor studerede listefarvning som en naturlig generalisation af sædvanlig farvning.

Gallaigrafer er opkaldt efter T. Gallai, der beskrev dem i “Kritische Graphen I”, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, 1963, Bind 8, pp. 165-192. Gallai studerede kritiske grafer, dvs. grafer med kromatisk tal  $k$ , hvor enhver ægte delgraf er  $(k - 1)$ -farvelig. En sådan graf har alle valenser  $\geq k - 1$ . Gallai viste at delgrafen induceret af punkterne af valens  $(k - 1)$  er en Gallaigraf.

# Kapitel 2

## Brooks' sætning

### 2.1 Brooks' oprindelige sætning

For enhver graf  $G$  er  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ . Dette ses let ved at farve grafens punkter ét efter ét med den mindst mulige farve fra mængden  $\{1, 2, \dots, \Delta(G)\}$ . Brooks' Sætning skærper denne øvre grænse når der ses bort fra sammenhængskomponenter der er komplette grafer og/eller ulige kredse. Se f.eks. [2] s. 248-249.

**Sætning 2.1.1 (Brooks' Sætning).** *Lad  $G$  være en vilkårlig graf. Da gælder følgende ækvivalens:*

$$\begin{cases} G \not\cong K_{\Delta(G)+1} & \text{for } \Delta(G) \neq 2, \\ G \not\cong C_{(2k+1)}, k \geq 1 & \text{for } \Delta(G) = 2. \end{cases} \quad (2.1)$$

$\Leftrightarrow$

$$\chi(G) \leq \Delta(G) \quad (2.2)$$

*Bevis.* At (2.2)  $\Rightarrow$  (2.1) ses af, at  $\chi(K_m) = m$  og at  $\chi(C_{2k+1}) = 3$ . Det skal altså vises at (2.1)  $\Rightarrow$  (2.2).

For  $\Delta(G) = 1$  indeholder  $G$  en  $K_2$  som har kromatisk tal 2.

For  $\Delta(G) = 2$  er sætningen en konsekvens af, at en graf er 2-farvelig hvis og kun hvis den ikke indeholder en ulige kreds.

Lad nu  $\Delta(G) \geq s$ , hvor  $s \geq 3$ . Det skal således vises at når  $G \not\cong K_{s+1}$ , så er  $G$   $s$ -farvelig. Dette vises ved induktion over  $|V(G)|$ . For  $|V(G)| \leq 4$  ses det let at påstanden er sand.

Hvis  $G$  ikke er sammenhængende, gælder påstanden for hver sammenhængskomponent ifølge induktionsantagelsen, og dermed for hele  $G$ .

Hvis  $G$  har et snitpunkt, er hver blok  $s$ -farvelig, og disse  $s$ -farvninger kan kombineres til en  $s$ -farvning af hele  $G$ .

Hvis  $G$  er 2-sammenhængende, med en snitpunktsmængde  $\{x, y\}$  og  $G = G_1 \cup G_2$ ,  $V(G_1 \cap G_2) = \{x, y\}$ , er  $G_1$  og  $G_2$  begge  $s$ -farvelige ifølge induktionsantagelsen. Hvis  $xy \in E(G)$  vil  $x$  få en farve forskellig fra  $y$  i begge de to  $s$ -farvninger, så at de to  $s$ -farvninger af  $G_1$  og  $G_2$  kan kombineres til én  $s$ -farvning af hele  $G$ . Hvis  $xy \notin E(G)$  vil  $G_1 \cup \{xy\}$  og  $G_2 \cup \{xy\}$  være  $s$ -farvelige eller (højst én af dem, pga.  $\Delta(G) \leq s$ ) være lig med en  $K_{s+1}$ . Så er  $G$   $s$ -farvelig, medmindre, lad os sige  $G_1$ , er en  $K_{s+1}$ . Dvs. at så er  $d_{G_2}(x) = d_{G_2}(y) = 1$ . Da  $s \geq 3$  medfører dette at  $G_2$  kan  $s$ -farves, så at  $x$  og  $y$  får samme farve.  $G_1 = K_{s+1} - xy$  kan også  $s$ -farves på en måde så at  $x$  og  $y$  får samme farve, og de to farvninger kan kombineres til en  $s$ -farvning af hele  $G$ .

Det kan således antages at  $G$  er 3-sammenhængende. Ved at farve punkterne i  $G$  sekventielt med den mindste, lovlige farve fra  $1, 2, 3, \dots$ , fås (højst) en  $(s+1)$ -farvning af  $G$ . Hvis et punkt  $x$  får farven  $s+1$ , må  $d(x) = s$  og de  $s$  naboer må have farverne  $1, 2, 3, \dots, s$ . Punktet  $x$  kan i denne situation omfarves med en vilkårlig farve  $i$ , og den af  $x$ 's naboer med farven  $i$  kan omfarves med en farve fra  $1, 2, \dots, s+1$ . Farven  $(s+1)$  kan således skubbes fra  $x$  til en af  $x$ 's naboer, eller eventuelt forsvinde. Alle forekomster af farven  $(s+1)$  kan på denne måde skubbes langs en vej så de forsvinder eller alle ender på det samme punkt  $x'$ . Hvis  $d(x') < s$  kan  $x'$  omfarves så at en  $s$ -farvning af  $G$  opnås.

Det kan derfor nu antages at  $\forall v \in V(G) : d(v) = s$ . Lad nu  $p, q \in V(G), pq \notin E(G)$ . Farven  $(s+1)$  kan nu skubbes så



den enten forsvinder, eller kun forekommer på  $q$ .  $p$  vil i en sådan farvning have 2 naboer,  $x$  og  $y$  med samme farve. Da  $G$  er 3-sammenhængende kan farven  $(s + 1)$  skubbes langs en sti uden om både  $x$  og  $y$  hen til  $p$ . Da  $x$  og  $y$  har samme farve og  $d(p) = s$  kan  $p$  omfarves med en farve fra  $1, 2, \dots, s$  så at en  $s$ -farvning af  $G$  er resultatet.  $\square$

Ovenstående bevis er Brooks' eget bevis fra 1941. Brooks' Sætning kan også vises som en konsekvens af Sætning 1.2.9:

*Alternativt bevis for Brooks' Sætning.* Start med at antage (2.1) og at  $\chi(G) \geq \Delta(G) + 1$ . Som før kan det antages at  $G$  er 2-sammenhængende. Grafen  $G$  er ikke  $d()$ -listefarvelig og har derfor en sammenhængskomponent som er en Gallai-graf iflg. Sætning 1.2.9. Men  $G$  har kun én blok og er derfor en ulige kreds,  $C_{2k+1}$ , eller en komplet graf,  $K_{\Delta(G)+1}$ . Modstrid.  $\square$

## 2.2 Udvidelse af Brooks' Sætning

Sætning 1.2.9 udvider således Brooks' Sætning. I det alternative bevis for Brooks' Sætning (i afsnit 2.1) kan  $\chi$  derudover erstattes af  $\hat{\chi}$ , og så haves også et alternativt bevis for Sætning 2.2.1 nedenfor.

**Sætning 2.2.1.** *Lad  $G$  være en vilkårlig graf. Da gælder følgende ækvivalens:*

$$\begin{cases} G \not\cong K_{\Delta(G)+1} & \text{for } \Delta(G) \neq 2, \\ G \not\cong C_{(2k+1)}, k \geq 1 & \text{for } \Delta(G) = 2. \end{cases} \quad (2.3)$$

$\Updownarrow$

$$\hat{\chi}(G) \leq \Delta(G) \quad (2.4)$$

*Bevis.* (2.3)  $\Rightarrow$  (2.4): Antag først at  $G$  er sammenhængende. Hvis  $G$  ikke er en Gallai-graf, følger resultatet umiddelbart af Sætning 1.2.9.

Antag derfor at  $G$  er en Gallai-graf. Hvis  $G$  indeholder et punkt  $v$ , hvorom gælder at  $d_G(v) < \Delta(G)$ , kan et punkt  $u$  i en lige kreds  $C$ ,  $C \cap G = \emptyset_{graf}$ , forbindes til  $G$  med en kant  $uv$ . Grafen  $G' = G \cup C \cup \{uv\}$  er ingen Gallai-graf og derfor ifølge Sætning 1.2.9  $d()$ -listefarvelig, da lige kredse er  $d()$ -listefarvelige. Specielt er  $G = G'[V(G)]$   $\Delta(G)$ -listefarvelig.

Nu mangler kun tilfældet hvor  $G$  er en  $\Delta(G)$ -regulær Gallai-graf. Men de eneste regulære Gallai-grafer er de komplette grafer og de ulige kredse (Lemma 1.2.10). Dette er i modstrid med antagelsen, og tilfældet hvor  $G$  er sammenhængende er bevist.

Antag nu at  $G$  ikke er sammenhængende. Da  $G \not\cong K_{\Delta(G)+1}$ , hvis  $\Delta(G) \neq 2$  og  $G \not\cong C_{(2k+1)}$ , hvis  $\Delta(G) = 2$ , er alle sammenhængskomponenter der indeholder punkter med valens  $\Delta(G)$  enten ikke-regulære Gallai-grafer eller ikke-Gallai-grafer, så ifølge det foregående kan hver sammenhængskomponent og dermed hele  $G$   $\Delta(G)$ -listefarves.

(2.4)  $\Rightarrow$  (2.3): Vi har at  $\chi(G) \leq \hat{\chi}(G)$ , så påstanden følger af at  $\chi(K_{\Delta(G)+1}) = \Delta(G) + 1$  og  $\chi(C_{2k+1}) = 3$ .  $\square$

#### Historisk:

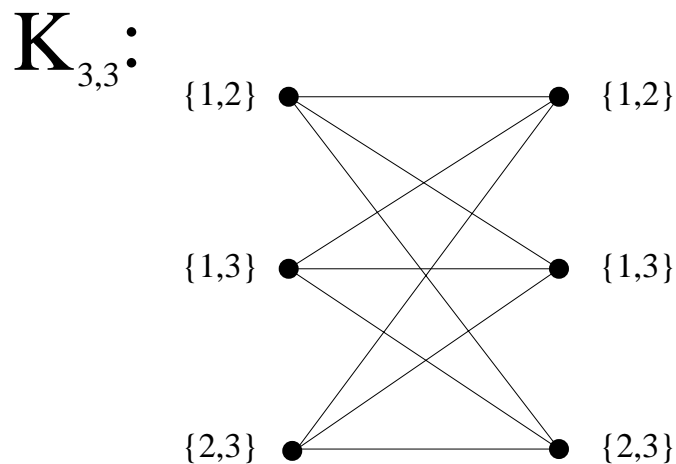
Brooks' artikel fra 1941, "On colouring the nodes of a network", *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 37, pp. 194-197, hvori Brooks' sætning første gang blev præsenteret, var en af de første der beskæftigede sig med "abstrakte" grafer, i modsætning til grafer indlejret på overflader.

Listefarvingsudvidelsen til Brooks' Sætning blev først vist af Erdős, Rubin og Taylor i artiklen [1] fra 1979.

# Kapitel 3

## Mindste 2-kromatiske grafer med højt listekromatisk tal.

En af de mindre 2-delte grafer med  $\chi(G) > \hat{\chi}(G)$  er  $K_{3,3}$  (se figur 3.1). At  $K_{3,3}$  ikke er listefarvelig med de givne lister ses af at hver af de 3 mulige mindste<sup>1</sup> farvninger ( $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ , og  $\{2, 3\}$ ) i én side af grafen, modsvares af en liste i den anden side, og at de restérende 2 farvninger (som vil bruge alle farverne  $\{1, 2, 3\}$ ) af den ene side vil have alle listerne i den anden side som ægte delmængder.



Figur 3.1:  $K_{3,3}$  med lister der umuliggør en 2-listefarvning.

---

<sup>1</sup>Dvs. med mindst antal forskellige farver.

### 3.1 Bestemmelse af $N(2, 3)$

I [1] efterlyses en metode til at bestemme det mindste antal punkter ( $N(2, k)$ ) i en graf  $G$  som er 2-farvelig (og dermed 2-delt), men ikke  $k$ -listefarvelig. Det bevises at  $M_k \leq N(2, k) \leq 2M_k$ , hvor  $M_k$  er defineret som kardinaliteten af en mindste familie af  $k$ -mængder der ikke har egenskab  $B$  (se definitionen af egenskab  $B$  nedenfor), eller ækvivalent som det mindst mulige antal kanter i en 3-kromatisk,  $k$ -uniform hypergraf.

En familie  $F$  af mængder har egenskab  $B$  hvis og kun hvis der eksisterer en mængde  $B$ , hvorom gælder at  $\forall X \in F : B \cap X \neq \emptyset \wedge X \not\subseteq B$ .

De nøjagtige værdier af  $M_k$  berettes kun kendt for  $k \leq 3$  i [1]. For  $k = 2$  er  $M_k = 3$ , thi den mindste 3-kromatiske 2-uniforme graf er  $K_3$ . For  $k = 3$  er  $M_k = 7$ . Den tilhørende grafs konstruktion gennemgås senere i Eksempel 3.2.1. Der gælder at  $2^{k-1} < M_k < k^2 2^{k+1}$ , men der kendes til bedre grænser.

**Lemma 3.1.1.** *Med  $M_k$  og  $N(2, k)$  som beskrevet ovenfor haves følgende grænser for  $N(2, k)$ :*

$$M_k \leq N(2, k) \leq 2M_k$$

*Bevis.*  $M_k \leq N(2, k)$ : Dette bevises ved at vise at  $K_{a,c}$  er  $k$ -listefarvelig for  $a + c < M_k$ . Mængden af  $k$ -lister der hører til punkterne i grafen benævnes  $S$ .  $S$  vil have egenskab  $B$  idet  $|S| = a + c < M_k$ . Pga. egenskab  $B$  kan elementer fra  $B$ -mængden anvendes til først at farve den ene side i grafen, idet  $B$ -mængden har noget til fælles med alle listerne i denne side. Dernæst kan den anden side farves, hvor farverne vælges i listerne ud fra kriteriet at de ikke må være i  $B$ -mængden. Dette er muligt idet ingen af listerne er indeholdt i  $B$ -mængden. Da farverne i den ene side af grafen blev valgt i  $B$ -mængden, og i den anden side udenfor  $B$ -mængden, og da punkter kun er forbundet med punkter på den modsatte side af 2-delningen, er der her tale om en farvning af hele grafen  $K_{a,c}$ ,

og dermed må  $M_k \leq N(2, k)$ .

$N(2, k) \leq 2M_k$  : Dette bevises ved at vise at  $K_{m,m}$  ikke er  $k$ -listefarvelig når  $m \geq M_k$ . Fordi  $m \geq M_k$  kan der som listemængde i begge sider af grafen vælges den samme mængde af  $k$ -mængder,  $S$ , som ikke har egenskab  $B$ . For enhver mængde  $C$  der består af farver udvalgt således at der er taget præcis én farve fra hver liste i den ene side af grafen, gælder der at  $\forall X \in S : X \cap C \neq \emptyset$ . Pga. at  $S$  ikke har egenskab  $B$  må der derfor eksistere et  $W \in S$  så at  $W \subseteq C$ . Da dette  $W$  er en liste i den anden side af grafen, ville et forsøg på at farve grafen med  $C$  i den ene side medføre, at punktet med listen  $W$  i den anden side ikke ville kunne farves. Da dette gjaldt for alle  $C$  med de givne kriterier, er  $K_{m,m}$  ikke  $k$ -listefarvelig for  $m \geq M_k$ .

Idet  $|K_{m,m}| = 2m \geq 2M_k$  og  $K_{m,m}$  ikke er  $k$ -listefarvelig for  $m \geq M_k$ , må der således gælde at  $N(2, k) \leq 2M_k$ .  $\square$

En skærpelse af den øvre grænse er udarbejdet i [4], og tilfældet  $n(3) = N(2, 3)$  i Theorem 2 i [4] gennemgås i det følgende. Hertil skal der bruges nogle resultater fra [4]. Først indføres noget notation.

*Notation.* Lad  $X$  og være en familie af lister. Da sættes

$$\cup X = \bigcup_{l \in X} l$$

**Lemma 3.1.2.** *Lad  $B_{a,c}$  være en 2-delt graf med  $a$  punkter i den ene del og  $c$  punkter i den anden, antag at  $B_{a,c}$  ikke er  $k$ -listefarvelig og at grafen er punkt-kritisk mht. denne egenskab. Lad  $A$  og  $C$  betegne familierne af  $k$ -lister, for hvilke  $B_{a,c}$  ikke er  $k$ -listefarvelig,  $A$  er listerne i delen med  $a$  punkter,  $C$  listerne i den anden del. Hvis det samlede antal forskellige farver i familierne  $A$  og  $C$ , kaldet  $N$ , er mindst muligt, så har vi at*

- (i) *Enhver af de  $N$  farver forekommer i lister på begge sider af 2-delingen.*

(ii) Ethvert muligt farvepar blandt de  $N$  farver optræder i en af listerne.

*Bevis.* (i) Lad  $S$  være mængden bestående af alle de forskellige farver der forekommer i listerne i  $A$  og  $C$ , altså  $S = \cup(A \cup C)$ . Hermed er  $|S| = N$ . Antag at der eksisterer en farve  $x \in S$ , så at  $x \in \cup A$ , men  $x \notin \cup C$ . Da  $B_{a,c}$  er punkt-kritisk mht. ikke- $k$ -listefarvelighed, må  $B_{a,c} - v$  være  $k$ -listefarvelig for alle  $v \in B_{a,c}$ . Derfor kan en farvning af  $B_{a,c} - v$  fuldføres, hvor  $v \in B_{a,c}$  er et punkt med  $x$  i sin liste, hvorefter  $v$  kan tilføjes grafen igen og farves med  $x$ . Dette er i modstrid med antagelsen om ikke- $k$ -listefarvelighed for  $B_{a,c}$  og der må således gælde at  $|\cup A| = |\cup C| = N$ .

(ii) Antag at et farvepar,  $\{x, y\}$  ikke forekommer sammen i nogen liste hørende til punkterne i  $B_{a,c}$ . Erstattes enhver forekomst af  $y$  med  $x$  i listerne, vil  $B_{a,c}$  stadig ikke kunne  $k$ -listefarves. Dette er i modstrid med minimaliteten af  $N$ .

□

Da antallet af punkter i  $B_{a,c}$  er  $a + c$ , antallet af forskellige farvepar blandt  $N$  farver er  $\binom{N}{2}$ , og antallet af forskellige farvepar i farvelister af længde  $k$  er  $\binom{k}{2}$  har vi

**Korollar 3.1.3.** For  $a, c, k$ , og  $N$  som i Lemma 3.1.2 er

$$a + c \geq \frac{\binom{N}{2}}{\binom{k}{2}} \quad (3.1)$$

□

I [4] anvendes et meget nyttigt redskab i forbindelse undersøgelse af  $k$ -listefarvelighed af 2-delte grafer, nemlig de såkaldte *transversaler*.

**Definition 3.1.4.** En *transversal* af en mængde  $S$  er en mængde  $S^t$ , hvorom gælder at  $\forall X \in S : X \cap S^t \neq \emptyset$ . En *minimal transversal* af en mængde  $S$  er en transversal  $S^t$  af  $S$  hvorom gælder at

for alle  $s \in S^t$  er  $S^t - \{s\}$  ikke en transversal af  $S$ . En transversal af størrelse  $k$  kaldes en  $k$ -transversal.

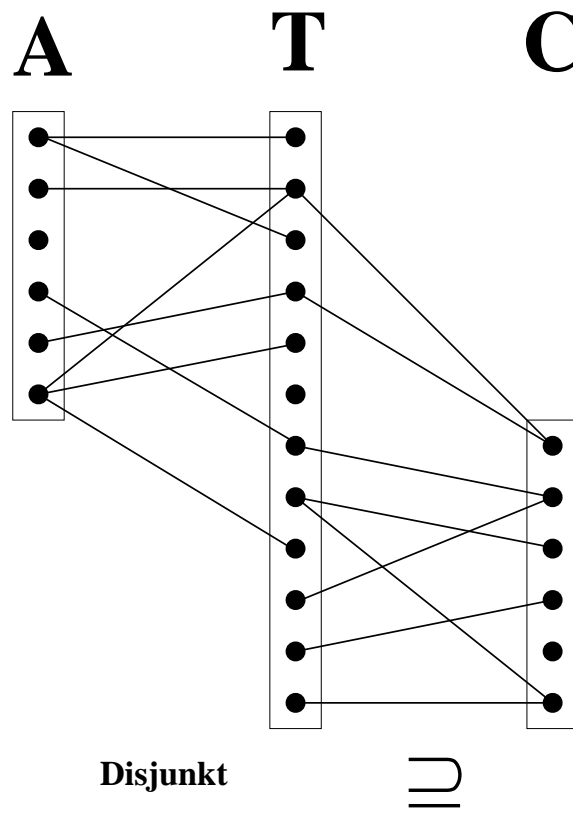
Transversaler kan f. eks. bruges til nemt at overbevise sig om at grafen  $K_{2,4}$  ikke er 2-listefarvelig. Thi kaldes listemængden i siden med 2 punkter for  $A$  og listemængden i siden med 4 punkter for  $C$ , ses det at en farvning af  $A$ -siden er transversal af  $A$ , der højst kan indeholde 2 forskellige farver, og for fastholdt  $A$  er der højst 4 forskellige transversaler som er farvninger af  $A$ -siden. Men da der er 4 punkter på  $C$ -siden kan  $C$  sammensættes således at hver af de (højst) 4 2-transversaler (evt. 1-transversaler) er liste for et punkt på  $C$ -siden.  $K_{2,4}$  er dermed ikke 2-listefarvelig, og på samme måde ses det at  $K_{m,m^m}$  ikke er  $m$ -listefarvelig. En mere interessant anvendelse af transversaler vil blive vist senere i kapitlet.

I beviset for næste lemma er der brug for en speciel klasse af 3-delte grafer, der konstrueres med udgangspunkt i 2-delte grafer med lister hørende til hvert af punkterne.

Lad  $B_{a,c}$  være en 2-delt graf med familier  $A$  og  $C$  af lister hørende til punkter i de 2 sider af grafen. Sæt  $S = \cup(A \cup C)$  og  $N = |S|$ . Lad  $T$  være familien af alle  $2^N$  delmængder af  $S$ . Der konstrueres en 3-delt graf  $\mathbf{G}$  med punktmængde bestående af mængderne  $A$ ,  $T$  og  $C$ , se figur 3.2. Punktmængderne  $A$ ,  $T$  og  $C$  i  $\mathbf{G}$  udgør 3 uafhængige mængder. Et punkt i  $A$  forbindes med et punkt  $T$  med en kant hvis og kun hvis de tilhørende mængder er disjunkte. Et punkt i  $C$  forbindes med et punkt i  $T$  hvis og kun hvis mængden hørende til punktet i  $C$  er en delmængde af mængden hørende til punktet i  $T$ . Der er ingen kanter mellem mængderne  $A$  og  $C$ .

**Lemma 3.1.5.** *Lad der være givet en komplet, 2-delt graf  $K_{a,c}$  med familier  $A$  og  $C$  af  $k$ -lister hørende til hver sin side af todelingen. Lad grafen  $\mathbf{G}$  være som beskrevet ovenfor. Da er følgende udsagn ækvivalente:*

**G:**



Figur 3.2: Skitse af en graf  $G$ , som konstrueres ud fra en 2-delt graf,  $B_{a,c}$ .



- (i)  $K_{a,c}$  kan ikke listefarves mht. listerne i  $A$  og  $C$ .
- (ii) Enhver transversal af  $A$  indeholder et element fra  $C$ .
- (iii) Enhver transversal af  $C$  indeholder et element fra  $A$ .
- (iv)  $T$  har intet punkt med valens 0.

*Bevis.* Antag at enhver transversal  $A^t$  af  $A$  indeholder et element fra  $C$  som delmængde. Idet enhver farvning af  $A$ -siden er en transversal af  $A$ , ses det let at  $K_{a,c}$  ikke kan listefarves mht. listerne i  $A$  og  $C$ . Hvis der til gengæld eksisterer en transversal  $A^t$  af  $A$  så at  $C_j \not\subseteq A^t$  for alle  $C_j \in C, 1 \leq j \leq c$ , vil der også eksistere en minimal transversal af  $A$  med samme egenskab, og som derfor er en farvning af  $A$ -siden, så det kan antages at  $A^t$  er en sådan farvning.  $A$ -siden kan nu farves med transversalen  $A^t$ , og  $C$ -siden kan farves ved for hvert  $C_j \in C$  at vælge en farve fra  $C_j \setminus A^t$ . Dette viser at (i) og (ii) er ækvivalente. På samme måde ses det at (i) og (iii) er ækvivalente.

Det haves således nu at hvis  $K_{a,c}$  er listefarvelig mht. listerne i  $A$  og  $C$  vil der eksistere en (minimal) transversal af  $A$  som ikke indeholder et element fra  $C$ . Elementet i  $T$  som svarer til denne transversal har derfor valens 0. Hvis  $T$  til gengæld har et punkt med valens 0, er den tilhørende mængde en transversal af  $A$  og indeholder intet element fra  $C$ , og  $K_{a,c}$  er listefarvelig mht. listerne i  $A$  og  $C$ . (i) og (iv) er således ækvivalente.  $\square$

**Lemma 3.1.6.** *Hvis  $B_{a,c}$  er en 2-delt graf som ikke er listefarvelig for en given tildeling af  $k$ -lister til punkterne i grafen, og antallet af forskellige farver der forekommer i alle disse lister benævnes  $N$ , så er  $N \geq 2k - 1$ .*

*Bevis.* Antag at listerne hørende til punkterne i  $B_{a,c}$  alle er  $k$ -delmængder af mængden  $\{1, 2, \dots, 2k - 2\}$ .

Mængden  $\{1, 2, \dots, k - 1\}$  vil da være en transversal i den ene side af grafen, og mængden  $\{k, k + 1, \dots, 2k - 2\}$  vil være

en transversal i den anden side. Men så er grafen  $k$ -listefarvelig, i modstrid med de givne egenskaber for  $B_{a,c}$ , dvs. at antagelsen om at  $k$ -listerne er delmængder af en  $(2k - 2)$ -mængde er forkert.  $\square$

**Sætning 3.1.7.** *Antag at  $K_{a,c}$  er en 2-delt, komplet graf som ikke er  $k$ -listefarvelig. Kald familierne af de tildelte lister for hvilke  $K_{a,c}$  ikke er  $k$ -listefarvelig for  $A$  og  $C$ , én familie for hver side i grafen. Hvis  $|S| = |\cup(A \cup C)| = N \geq 2k - 1$  og  $0 \leq l \leq N$ , så gælder der for  $a$  og  $c$  følgende tre uligheder:*

$$a + c \geq \frac{2\binom{N}{l}}{\binom{N-k}{l} + \binom{N-k}{l-k}} \quad (3.2)$$

$$a\binom{N-k}{l} + c\binom{N-k}{l-k} \geq \binom{N}{l} \quad (3.3)$$

$$c\binom{N-k}{l} + a\binom{N-k}{l-k} \geq \binom{N}{l} \quad (3.4)$$

- hvor  $\binom{N-k}{l} = 0$  for  $l > N$ , og  $\binom{N-k}{l-k} = 0$  for  $l < k$ .

*Bevis.* Betragt mængden  $T_l = \{T | T \text{ er en } l\text{-delmængde af } S\}$ , og grafen  $\mathbf{G}_l$  defineret på samme måde som  $\mathbf{G}$  ovenfor, blot med  $T_l$  "indskudt" imellem  $A$  og  $C$  i stedet for  $T$ . Valenserne for alle elementerne  $A_j \in A$ ,  $1 \leq j \leq a$ , opfylder  $d(A_j) = \binom{N-k}{l} = p$ , og valenserne for alle elementerne  $C_j \in C$ ,  $1 \leq j \leq C$  opfylder  $d(C_j) = \binom{N-k}{l-k} = q$ .

Dette ses af at antallet af lister i  $T_l$  der ikke indeholder nogen af de  $k$  farver i  $A_j$  må være  $p$ , og antallet af lister i  $T_l$  der indeholder alle de  $k$  farver i  $C_j$  må være lig antallet af lister i  $T_l$  der indeholder præcis  $l - k$  af de  $N - k$  farver der ikke er i  $C_j$ , som er  $q$ .

Dvs. at hvis  $\binom{N}{l} - ap - cq > 0$  er antallet af lister i  $T_l$  større end valenssummen af alle elementerne i  $A \cup C$ , og der må dermed

være et element  $T \in T_l$  med  $d(T) = 0$ . Lemma 3.1.5 (iv) giver derfor at hvis  $K_{a,c}$  ikke er  $k$ -listefarvelig, må der gælde at

$$ap + cq \geq \binom{N}{l}$$

som viser (3.2), og på tilsvarende vis at

$$aq + cp \geq \binom{N}{l}$$

hvilket viser (3.3). Ved at summere (3.2) og (3.3) fås at

$$a + c \geq \frac{2\binom{N}{l}}{p + q}$$

som viser (3.4) □

Hermed kan vi gennemgå

**Sætning 3.1.8.** *Antag at  $K_{a,c}$  ikke er 3-listefarvelig. Så er*

$$a + c \geq n(3) = 14 = 2m(3) \tag{3.5}$$

*Bevis.* Beviset deles op efter antallet af forskellige farver der kan forsøges brugt til en farvning.

$N \leq 4$ : Lemma 3.1.6 giver, at  $N \geq 5$ .

$N = 5$ : For  $k = 3$  og  $l = 2$  i Sætning 3.1.7 fås at  $a + c \geq \frac{2\binom{5}{2}}{\binom{5-3}{2} + \binom{5-3}{2-3}} = 20$

$N = 6$ : For  $k = 3$  og  $l = 3$  i Sætning 3.1.7 fås at  $a + c \geq 20$

$N = 7$ : For  $k = 3$  og  $l = 3$  i Sætning 3.1.7 fås at  $a + c \geq 14$ . Derudover findes der Fano Plan konstruktionen (se eksempel 3.2.1), som et eksempel på en ikke-3-listefarvelig  $K_{7,7}$ .

$N = 8$ : For  $k = 3$  og  $l = 4$  i Sætning 3.1.7 fås at  $a + c \geq 14$ .

$N = 9$ : For  $k = 3$  og  $l = 4$  eller  $l = 5$  i Sætning 3.1.7 fås at  $a + c \geq 12$ .  
Det bevises at  $K_{a,c}$  er 3-listefarvelig for  $a + c = 12$  og for  $a + c = 13$ .

$a + c = 12$ : (3.3) og (3.4) i Sætning 3.1.7 giver at

$$15a + 6c \geq 126$$

og

$$6a + 15c \geq 126$$

så at

$$a = c = 6$$

De 6 punkter i  $A$  må have valens  $\binom{9-3}{4} = 15$  i  $\mathbf{G}_l$ . Listerne i  $A$  indeholder ialt 18 elementer fordelt på 9 farver, så der må være lister der ikke er indbyrdes disjunkte. Dvs. at der er mindst 2 lister i  $A$  der dækker højst 5 af de 9 farver. Derfor er der et element i  $T_l$  der består af de sidste 4 farver, og dette element vil være nabo til de 2 førnævnte lister i  $A$ . Om nabomængden til  $A$  i  $\mathbf{G}_l$ ,  $N(A)$ , må der derfor gælde at  $|N(A)| \leq 6 \cdot 15 - 1 = 89$ . De 6 punkter i  $C$  har valens  $\binom{9-3}{1} = 6$  i  $\mathbf{G}_l$ . Derfor må  $|T_l| = \binom{9}{4} = 126 > |N(A)| + |N(C)|$ , så at Lemma 3.1.5 (iv) giver os at  $K_{a,c}$  kan listefarves mht. listerne  $A$  og  $C$ ,

$a + c = 13$ : For  $a \leq 5$  er (3.3) i Sætning 3.1.7 ikke opfyldt ( $5 \cdot 15 + 8 \cdot 6 = 123 < 126$ ), og  $K_{a,c}$  må i disse tilfælde være  $k$ -listefarvelig. Det kan således antages at  $a = 6$  og  $c = 7$ . Betragt grafen  $H = K_6$ , hvor punkterne i  $H$  er repræsentanter listerne i  $A = \{A_1, \dots, A_6\}$ , og hvor kanterne i  $H$  får tildelt vægte 0, 1, eller 5, alt efter størrelsen af snitmængden af de 2 lister som en kant forbinder. Disse

snitmængder vil have størrelsen 0, 1, eller 2, idet en snitmængde af størrelse 3 vil være ensbetydende med fuldstændigt overlap mellem 2 af listerne i  $A$ , som er ækvi-  
valent med tilfældet  $a = 5$ , og  $c = 7$ , og som giver en 3-  
listefarvelig graf, jvf. tilfældet hvor  $a + c = 12$ . Værdierne  
0, 1, og 5 for vægte er valgt, da det netop er størrelserne  
på snitmængden af 2 nabomængder i  $\mathbf{G}_l$  til lister der har  
overlap på hhv. 0, 1, og 2 farver ( $\binom{9-(3+3)}{4}$ ), ( $\binom{9-(3+3-1)}{4}$ ), og  
( $\binom{9-(3+3-2)}{4}$ )).

Antag at  $H$  indeholder en trekant med samlet vægt 0. Denne trekant kan antages at bestå af elementerne  $A_1$ ,  $A_2$ , og  $A_3$  og deres indbyrdes kanter. Da der er 9 farver ialt kan ingen af  $A_4$ ,  $A_5$  og  $A_6$  være disjunkte fra foreningen af  $A_1$ ,  $A_2$  og  $A_3$ , og må overlappe hver af disse med 1 element eller overlappe én af dem med mindst 2 elementer. Hermed overlapper nabomængden til hver af  $A_4$ ,  $A_5$  og  $A_6$  den samlede nabomængde til  $A_1$ ,  $A_2$  og  $A_3$  med mindst 3 elementer. Dette betyder at  $|N(A)| \leq |N(A_1) \cup N(A_2) \cup \dots \cup N(A_2)| \leq 3 \cdot 15 + 3 \cdot 12 = 81$ . På grund af  $C$ 's højst 42 naboer i  $\mathbf{G}_l$  opnås en modstrid som i foregående tilfælde.

Antag nu at  $H$  indeholder en trekant med samlet vægt 1. Antages elementerne fra trekanten igen at være  $A_1$ ,  $A_2$  og  $A_3$ , ses det at disse elementers nabo mængde vil have størrelsen  $3 \cdot 15 - \binom{4}{4}$ , og at nabomængden til hver af  $A_4$ ,  $A_5$  og  $A_6$  vil overlappe den samlede nabomængde til  $A_1$ ,  $A_2$  og  $A_3$  med midst 2 elementer, hvilket giver uligheden  $|N(A)| \leq 3 \cdot 15 - 1 + 3 \cdot 13 = 83$ , og en modstrid kan igen udledes.

Det kan nu antages at alle trekanter i  $H$  har en samlet vægt  $> 1$ . Antag desuden at  $H$  indeholder en kant med vægt 0. Da der i dette tilfælde er 2 indbyrdes disjunkte  $A$ -

elementer, og da de resterende elementer således overlapper begge disse 2 med mindst 1 farve i hver eller den ene med mindst 2 farver, fås at  $|N(A)| \leq 2 \cdot 15 + 4 \cdot 13 = 82$  er vi igen færdige.

Til sidst kan det antages at alle kanter i  $H$  har en vægt  $> 0$ . Hvis der er mindst én kant med vægt 5 er  $|N(A)| \leq 15 + 10 + 4 \cdot 14 = 81$ . Hvis ikke, ses det at der må være 3 elementer i  $A$  som ikke har en fælles farve. Dette er pga. at idet alle vægte i  $H$  er præcis 1, eksisterer der 2 elementer i  $A$  som har 1 fælles farve i deres lister, lad os sige  $A_1 \cap A_2 = \{1\}$ . Hvis alle de resterende elementer  $A_3, \dots, A_6 \in A$  også indeholder farven 1 er 1 en transversal for  $A$  og  $K_{a,c}$  er listefarvelig med listerne fra  $A$  og  $C$ .

Et element i  $\{A_3, \dots, A_6\}$ , lad os sige  $A_3$ , kan nu antages ikke at indeholde fællesfarven for  $A_1$  og  $A_2$ , så at  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ .  $A_1$  og  $A_2$  har således et overlap på ét element i deres nabomængder,  $A_3$  overlapper  $A_1$  og  $A_2$ 's samlede nabomængde med 2 elementer, og hver af  $A_4, \dots, A_6$ 's nabomængder overlapper  $A_1, \dots, A_3$ 's samlede nabomængde med mindst 2 elementer. Så er  $|N(A)| \leq 15 + 14 + 4 \cdot 13 = 81$ , og vi er færdige.

$N \geq 10$ : For  $k = 3$  i (3.1) fås at  $a + c \geq 15$ .

□

Hermed er det bevist at  $N(2, 3) = 14$ .

## 3.2 Fano Plan konstruktionen

**Eksempel 3.2.1.** Fano Plan konstruktionen. Betragt hypergrafen  $F$  i figur 3.3. Denne graf har følgende egenskaber:

- Den har 7 punkter.

- Den er 3-uniform med 7 kanter.
- Ethvert punkt indgår i præcis 3 kanter.
- Ethvert punkt i grafen er forbundet med ethvert andet punkt via en kant.
- Ethvert par af kanter adskiller sig fra hinanden med mindst 2 punkter.
- Den er ikke 2-farvelig.

At grafen  $F$  ikke er 2-farvelig ses af følgende argument: Antag at  $F$  er 2-farvelig.  $F$ 's punkter kan dermed deles i 2 farveklasser,  $A$  og  $B$ , med  $|A| < |B|$  (uden tab af generalitet).

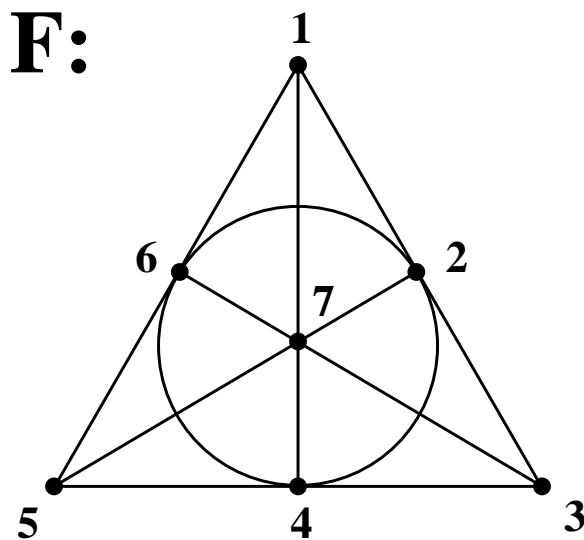
Hvis  $|A| = 1$  er punktet i  $A$  med i 3 kanter og dermed ikke med i de resterende 4, som så må bestå af punkter med éns farve, modstrid.

Hvis  $|A| = 2$  er de to punkter med i ialt 5 forskellige kanter (da de jo har 1 kant fælles), og er derfor ikke med i 2 af kanterne i grafen, modstrid.

Hvis  $|A| = 3$ , kan de 3 punkter i  $A$  ikke alle være med i den samme kant. Konfigurationen må således være, at for  $a_1, a_2, a_3 \in A$ , er  $a_1$  og  $a_2$  i en fælles kant,  $a_1$  og  $a_3$  er i en fælles kant, og  $a_2$  og  $a_3$  ligeså. Alt i alt er punkterne i  $A$  med i  $3 \cdot 3 - 3 = 6$  af de 7 kanter i  $F$ , så at der er 1 kant i  $F$  der udelukkende består af 3 punkter fra farveklassen  $B$ , modstrid. Grafen  $F$  kan således ikke være 2-farvelig.

Bruges kanterne i  $F$  som lister på begge sider i  $K_{7,7}$  opnås grafen i figur 3.4. Med disse lister kan grafen  $K_{7,7}$  ikke listefarves, thi hvis den kunne, ville der være to disjunkte transversaler (én for hver side i  $K_{7,7}$ ),  $S_1^t$  og  $S_2^t$ , af mængden af lister  $S$ , der ikke fuldstændigt indeholdt nogen af listerne. Transversalerne  $S_1^t$  og  $S_2^t$  ville dermed definere 2 farveklasser som  $F$  i figur 3.3 kunne

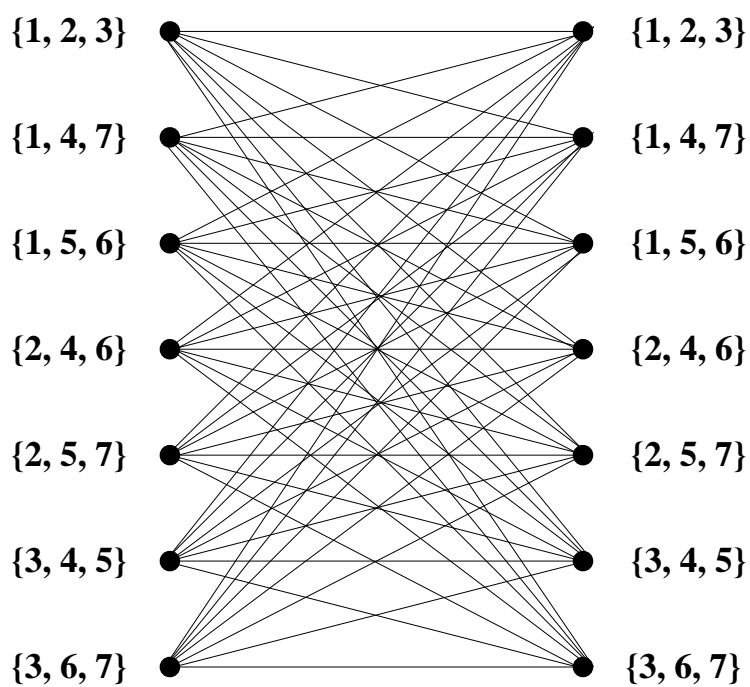
farves med (eventuelle punkter i  $V(H) \setminus (S_1^t \cup S_1^b)$  kan indlemmes vilkårligt i en af de 2 farveklasser). Men dette er i modstrid med den før beviste ikke-2-farvelighed af  $F$  og  $K_{7,7}$  er som følge heraf ikke 3-listefarvelig.



Figur 3.3: Fano Plan konstruktionen: Hypergrafen indikerer 3-lister der umuliggør en 3-listefarvning af  $K_{7,7}$ .



**$K_{7,7}$**



Figur 3.4: Fano Plan konstruktionen:  $K_{7,7}$  med lister dannet udfra kanterne i grafen i figur 3.3.

### 3.3 Éntydighed af Fano Plan Konstruktionen?

Man kan ud fra beviset for Sætning 3.1.8 se at Fano Plan konstruktionen ikke nødvendigvis giver den entydige konfiguration på en mindste 2-delt komplet graf der ikke kan 3-listefarves. Tilfældene hvor antallet af farver  $N$  er hhv. 8 eller 9 kan betyde at der eksisterer andre ikke-3-listefarvelige, 2-delte grafer med  $N(2, k) = 14$ .

I [4] fremsættes en formodning om at Fano Plan konstruktionen rent faktisk fører til en entydig konstruktion med  $N(2, k) = 14$ , og det oplyses at tilfældene  $(|N|, a, c) = (9, 6, 8)$  og  $(9, 7, 7)$  er de eneste tilfælde der ikke er blevet efterprøvet i grundige detaljer.

**Lemma 3.3.1.** *Lad  $B_{a,c}$  være en todelt graf med todeling  $(A, C)$ . Lad der til hvert punkt  $b \in B_{a,c}$  være knyttet en liste  $S(b)$  af længde (mindst)  $k$ . Hvis der for mindst én af mængderne  $S_A = \bigcup_{u \in A} S(u)$  og  $S_B = \bigcup_{v \in B} S(v)$  eksisterer en transversal  $T$  hvor  $|T| < k$ , så er  $B_{a,c}$  listefarvelig mht. listerne  $S(b), b \in B_{a,c}$ .*

*Bevis.* Antag eksistensen af en transversal  $T$  som givet i lemmaet. Den ene side af  $B_{a,c}$  kan derfor farves med farverne i  $T$ , og punkterne i den anden side kan alle farves med et punkt fra deres lister idet  $|T| < k$ .  $\square$

**Lemma 3.3.2.** *Lad  $B_{a,c}$  være en todelt graf med todeling  $(A, C)$ . Lad der til hvert punkt  $b \in B_{a,c}$  være knyttet en liste  $S(b)$  af længde  $k$ . Hvis der til mængden  $S_A = \bigcup_{u \in A} S(u)$  eksisterer  $t$  forskellige<sup>2</sup>  $k$ -transversaler  $T_i, 1 \leq i \leq t$ , og  $t > c$ , så er  $B_{a,c}$  listefarvelig mht. listerne  $S(b), b \in B_{a,c}$ .*

*Bevis.* Antag at der eksisterer  $t$  forskellige  $k$ -transversaler  $T_i$  som givet i lemmaet, men at  $B_{a,c}$  ikke kan listefarves mht.  $k$ -listerne  $S(b), b \in B_{a,c}$ . Den eneste mulige grund til at en sådan listefarvning er umulig er, at hver transversal  $T_i$  er identisk med en liste på  $C$ -siden, idet transversalerne har længde  $k$ . Da  $t > c$  opnås en modstrid.  $\square$

<sup>2</sup>Forskellige betragtet som mængder.

Lemma 3.3.1 og Lemma 3.3.2 er ikke særlig dybe, og introducerer ikke nye ideer. De er blot specialtilfælde af Lemma 3.1.5 og kan også bevises herudfra. Ikke desto mindre er de to lemmaer yderst nyttige i den følgende analyse, der skal påvise at visse konfigurationer af todelte grafer med  $|N| = 8$  eller  $9$  og  $a + c = 14$  er 3-listefarvelige.

Lemma 3.3.1 kan bruges til at sætte en øvre grænse for antallet af lister en given farve kan forekomme i. Når det er påvist at alle farver højst kan forekomme i et vist antal lister, vil antallet af transversaler i de resterende konfigurationer i visse tilfælde enkelt kunne påvises at være tilpas højt til at Lemma 3.3.2 kan anvendes.

Alle lister knyttet til punkter i  $A$  og  $C$  er i det følgende af længde 3. Bemærk også at alle  $|N|$  farver skal forekomme på begge sider af todelingen af  $K_{a,c}$  for givet, fastholdt  $(a + c)$ .

$|N| = 8, a + c = 14$  Der er 7 tilfælde, ét for hver af  $a = 1, \dots, 7$   
og  $c = 14 - a$ .

$a \leq 2$ : Disse tilfælde kan ikke forekomme, da der kun er 3 (for  $a = 1$ ) eller 6 (for  $a = 2$ ) farvepladser til de  $|N| = 8$  farver.

$a = 3$ : De 3 lister i  $A$ -siden indeholder 9 farvepladser som skal udfyldes med de 8 farver. Der må således være præcis 1 farve som forekommer i 2 af de 3 lister, og  $K_{a,c}$  ses at være 3-listefarvelig ifølge Lemma 3.3.1.

$a = 4$ : Forekommer en farve i mindst 3 lister påvises listefarvelighed igen med Lemma 3.3.1. Antallet af gange de forskellige farver forekommer kan således uden tab af generalitet antages at være som følger:

Farve	1	2	3	4	5	6	7	8
Antal	2	2	2	2	1	1	1	1

To farver der forekommer i 2 lister skal forekomme i samme liste mindst én gang, thi hvis en farve forekommer i 2 af de 4 lister og en anden farve forekommer i de sidste 2 lister medfører Lemma 3.3.1 listefarvelighed. Vi kan nu opstille følgende billede af de 4 lister:

Listenr.	Farveliste
1	1 v w
2	1 2 ?
3	q 2 r
4	s t u

-hvor  $1, 2 \notin \{q, r, s, t, u, v, w\}$ ,  $q, r, s, t$  og  $u$  er 5 forskellige farver (pga. Lemma 3.3.1),  $v$  og  $w$  er 2 forskellige farver, og “?” markerer en farve der ikke er interessant i det efterfølgende argument.

Af ovenstående ses det at der er mindst 9 forskellige 3-transversaler indeholdende farven 1 (nemlig dem på form  $\{1, q, s\}, \{1, q, t\}, \dots, \{1, r, u\}$ ), og mindst 6 forskellige 3-transversaler indeholdende farven 2, og ikke indeholdende farven 1. Dette giver ialt mindst 15 forskellige 3-transversaler i  $A$ -siden af grafen som modsvares af  $C$ -sidens 10 lister, så at Lemma 3.3.2 medfører listefarvelighed i dette tilfælde.

De resterende tilfælde,  $a = 5, \dots, 7$  gennemgås ikke, da analysen af dem, som angivet i [4], ikke er særlig informativ. Jeg vil blot nævne at analysen af tilfældet  $a = 5$  sikkert kan gennemføres ved at bruge Lemma 3.3.1 og Lemma 3.3.2, hvorimod det er min opfattelse at en anden metode skal anvendes til tilfældene  $a = 6$  og  $a = 7$  pga. at der i visse konfigurationer ikke kan fremtvinges tilstrækkeligt mange 3-transversaler til at Lemma 3.3.2 kan benyttes.

$|N| = 9, a + c = 14$  Der er også her 7 tilfælde, ét for hver af  $a = 1, \dots, 7$  og  $c = 14 - a$ .

$a \leq 2$ : Disse tilfælde kan ikke forekomme, pga. for få farvepladser til de  $|N| = 9$  farver.

$a = 3$ : I dette tilfælde er der 9 farvepladser til de 9 farver, hvilket resulterer i  $3^3 = 27$  3-transversaler på  $A$ -siden af grafen, og Lemma 3.3.2 kan anvendes.

$a = 4$ : Forekommer den samme farve i 3 af listerne er grafen 3-listefarvelig iflg. Lemma 3.3.1. Antallet af gange de forskellige farver forekommer kan antages at være følgende:

Farve	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Antal	2	2	2	1	1	1	1	1	1

Enhver farve der forekommer 2 gange skal forekomme i en liste sammen med hver af de andre farver der forekommer 2 gange, jvf. argumentet i tilfældet  $|N| = 8, a = 4$ . Da to lister på form  $\{1, 2, 3\}$  vil medføre listefarvelighed via tilfældet  $a + c = 13$ , kan der antages konfiguration som i tabellen for tilfældet  $|N| = 8, a = 4$ , hvor der kan identificeres mindst 15 3-transversaler. Lemma 3.3.2 giver også her listefarvelighed.

Også her vil jeg undlade at forsøge på analysen af tilfældene  $a = 5, \dots, 7$ . Men da tilfældene  $(|N|, a, c) = (9, 6, 8)$  og  $(9, 7, 7)$  heller ikke er efterprøvet helt til bunds i [4], vil jeg opskrive konfigurationerne der skal efterprøves, og desuden præsentere 2 konkrete tildelinger af lister der ikke har tilstrækkeligt mange 3-transversaler til at metoden med Lemma 3.3.2 kan anvendes.

$a = 6$ : Her er der 18 farvepladser der skal udfyldes med de 9 farver. Forekommer en farve i mindst 5 lister følger listefarvelighed af Lemma 3.3.1. Forekommer en farve i 4 lister, må alle 6 farvepladser i de 2 resterende lister alle være besat med forskellige farver, igen pga. Lemma 3.3.1. Men så kan der dannes 9 3-transversaler med farven der forekommer 4 gange og de 6 forskellige farver, og Lemma 3.3.2 kan anvendes. Følgende konfigurationer er tilbage:

Farve	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Konfiguration nr.
A	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
n	3	2	2	2	2	2	2	2	1	2
t	3	3	2	2	2	2	2	1	1	3
a	3	3	3	2	2	2	1	1	1	4
l	3	3	3	3	2	1	1	1	1	5

Betragt nu følgende tildeling af lister, svarende til konfiguration nr. 1 ovenfor:

Listenr.	Farveliste
1	1 3 4
2	1 5 9
3	2 6 9
4	2 7 8
5	3 5 7
6	4 6 8

Det ses at ovenstående listetildeling kun kan frembringe tre 3-transversaler;  $\{2, 4, 5\}$ ,  $\{3, 8, 9\}$ , og  $\{4, 7, 9\}$ . Et forsøg på at anvende den før brugte metode er således nytteløs.

$a = 7$ : Med lignende argumenter som i tilfældet  $a = 6$ , fås at konfigurationer hvor en farve forekommer i mindst

5 lister er listefarvelige. De resterende konfigurationer er:

Farve	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Konfiguration nr.
A n t a l	3	3	3	2	2	2	2	2	2	1
	3	3	3	3	2	2	2	2	1	2
	3	3	3	3	3	2	2	1	1	3
	3	3	3	3	3	3	1	1	1	4
	4	3	2	2	2	2	2	2	2	5
	4	3	3	2	2	2	2	2	1	6
	4	3	3	3	2	2	2	1	1	7
	4	3	3	3	3	2	1	1	1	8
	4	4	2	2	2	2	2	2	1	9
	4	4	3	2	2	2	2	1	1	10
	4	4	3	3	2	2	1	1	1	11
	4	4	3	3	3	1	1	1	1	12
	4	4	4	2	2	2	1	1	1	13
	4	4	4	3	2	1	1	1	1	14
	4	4	4	4	1	1	1	1	1	15

Som et eksempel på en listetildeling med farveantal som i konfiguration 1 ovenfor vises her:

Listenr.	Farveliste
1	1 3 4
2	1 5 6
3	1 2 7
4	2 5 8
5	2 3 6
6	3 7 9
7	4 8 9

Denne konfiguration har kun to 3-transversaler;  $\{1, 2, 9\}$  og  $\{1, 3, 8\}$ .

Historisk:

Bestemmelsen af  $N(2, k)$  nævnes første gang som et problem af Erdős, Rubin og Taylor i [1] fra 1979. I [1] vises også forbindelsen til  $M_k$ . Bestemmelsen af  $M_k$  er et meget ældre problem af Erdős. Selv størrelsesordenen af  $M_k$  og dermed også af  $N(2, k)$  er ikke kendt.

Egenskaben  $B$ , som benyttes i definitionen af  $M_k$ , hedder “ $B$ ” efter F. Bernstein, en student af G. Cantor, pga. en artikel fra 1908. Navngivningen skyldes Miller (1937), og Erdős benyttede denne terminologi da han tog emnet op i 1960’erne, se f.eks. P. Erdős, *The Art of Counting*, The MIT Press, 1973.



# Kapitel 4

## Listefarvning af plane grafer

### 4.1 5-listefarvelighed af planare grafer

Enhver planar graf er 5-listefarvelig. Dette resultat skyldes en sætning af Carsten Thomassen, se [5]. Sætningen siger at enhver *Nærtriangulering*  $G$  kan 5-listefarves, hvor en graf  $G$  er en nærtriangulering hvis

1.  $G$  er planar
2.  $G$  ikke har nogen sløjfer eller multiple kanter
3.  $G$  består af en kreds  $C: v_1, v_2, \dots, v_p, v_1$ , og punkter og kanter indeni  $C$  så at enhver begrænset flade er begrænset af en trekant.  $C$  kaldes *den ydre kreds* i  $G$ .  $G - C$  kaldes  $G$ 's *indre*.

Beviset for den næste sætning giver et af de simpleste beviser for 5-farvesætningen (som først bevistes i 1891 af P. J. Heawood, se [10], side 190). Selve formuleringen af sætningen er ved første øjekast lidt indviklet, men er nødvendig for at få induktionen til at løbe glat.

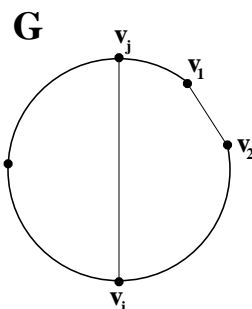
**Sætning 4.1.1.** *Lad  $G$  være en nærtriangulering med ydre kreds  $C$ . Antag at nabopunkterne  $v_1, v_2 \in V(C)$  er farvet med farverne 1 og 2, respektivt. Antag endvidere at  $S(v)$  er en liste bestående af (mindst) 3 farver for  $v \in C - \{v_1, v_2\}$  og af (mindst) 5 farver for*

$v \in G - C$ . Så kan farvningen af  $v_1$  og  $v_2$  udvides til en farvning af hele  $G$ .

*Bevis.* Beviset anvender induktion over antallet af punkter i  $G$ ,  $v(G)$ . Når der henvises til grafen  $G$ , tænkes der på en specifik, plan repræsentation af  $G$  som en nærtriangulering.

For  $v(G) = p = 3$  er  $G = C$ , og resultatet følger trivielt i basistilfældet, så der kan gåes til induktionskridtet.

Hvis  $C$  har en diagonal  $v_i v_j$ ,  $2 \leq i \leq j - 2 \leq p - 1$  ( $v_{p+1} = v_1$ ) (se figur 4.1) kan induktionsantagelsen anvendes på kredsen

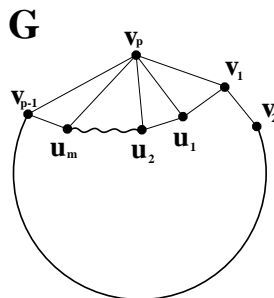


Figur 4.1:  $G$  er en nærtriangulering med en diagonal.

$v_1 v_2 \dots v_i v_j v_{j+1} \dots v_1$  og dens indre. Dette tildeler specielt  $v_i$  og  $v_j$  2 farver så at  $v_i$  og  $v_j$  nu overtager rollen som  $v_1$  og  $v_2$ , hvorefter induktionsantagelsen kan anvendes på kredsen  $v_j v_i v_{i+1} \dots v_{j-1} v_j$ . Dette giver en listefarvning af hele  $G$  med de tildelte lister. Det kan derfor antages at  $G$  ikke har nogen diagonaler.

Lad nu  $v_1, u_1, u_2, \dots, u_m, v_{p-1}$  være  $v_p$ 's naboer i retning med uret omkring  $v_p$  (se figur 4.2). Pga. trianguleringen af  $G$ 's indre, indeholder  $G$  stien  $P : v_1 u_1 u_2 \dots u_m v_{p-1}$ .

Da  $G$  ikke har nogen diagonaler, udgør  $P \cup (C - v_p)$  en kreds  $C'$ . Lad  $a$  og  $b$  være 2 forskellige farver i  $S(v_p) \setminus \{1\}$  og sæt  $L'(u_i) = S(u_i) \setminus \{a, b\}$  for  $1 \leq i \leq m$  og  $L'(v) = S(v)$  når  $v \in G \setminus \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ . Induktionshypotesen kan nu anvendes på  $C'$  og dens indre, og de nye lister  $L'$ . Farvningen af hele  $C$



Figur 4.2:  $G$  er en nærtriangulering, hvor punktet  $v_p$  fraregnes for at kunne anvende induktionshypotesen.

fuldføres ved at tildele enten  $a$  eller  $b$  som  $v_p$ 's farve, så at  $v_p$  og  $v_{p-1}$  får forskellige farver.  $\square$

## 4.2 En algoritme bygget over C. Thomassens bevis

Beviset for Sætning 4.1.1 indikerer en algoritme til 5-listefarvning af planare grafer der er nærtrianguleringer, (og enhver plan 2-sammenhængende graf kan let indlejres i en nærtriangulering ved at inddele alle de endelige områder i trekanter). Ydermere ser en sådan algoritme ud til at kunne fuldføre en farvning ved anvendelse af et antal skridt der ikke er højere end en bestemt lineær funktion af antallet af punkter i den givne graf  $G$ . Beviset for Sætning 4.1.1 benytter sig ikke af omfarvninger, som f.eks. Kempe anvendte i sit forsøg på at bevise 4-farvesætningen vha. Kempe-kæder (se f.eks. *B. Toft* s. 256 i [2]). Ethvert punkt i  $G$  farves således kun 1 gang af algoritmen. Derudover skal der af algoritmen udføres operationer på grafen for at nå frem til en mængde delgrafer (trekanter) hvor selve farvningen af et punkt kan gennemføres. Med et hensigtsmæssigt valg af datastruktur kan antallet af operationer holdes under en lineær funktion af  $V(G)$ . Betragt følgende algoritme, hvor strukturen af input beskrives lige

efter formuleringen af selve algoritmen.

**Algoritme 4.2.1.**

Farv( $G, v_a, v_b, c_a, c_b, q, r$ ):

```

01  HVIS  $|V(G)| = 3$ 
02    farvelæg det ufarvede punkt,  $v_c$ , med en farve fra
       $S(v_c) - \{c_a, c_b\}$ ;
03  ELLERS
04    Sæt  $i = q$ ;
05    GENTAG INDTIL  $i > r$  ELLER der er fundet en
      diagonal
06      undersøg om  $v_i$  er endepunkt for en diagonal i  $C$ ;
07    HVIS  $v_i$  og  $v_j$  udgør en diagonal i  $C$ 
08      del  $G$  i 2 grafer ved  $v_i v_j$ ,  $G_1$  og  $G_2$ , så at  $G_1$ 
      indeholder  $v_a$  og  $v_b$ ;
09      Farv( $G_1, v_a, v_b, c_a, c_b, j, p$ );
10      Farv( $G_2, v_i, v_j, c_i, c_j, i, j$ );
11    ELLERS
12      erstat  $v_p$  i  $C$  af sekvensen  $u_m, \dots, u_1$ , hvor  $u_1, \dots, u_m$ 
      er  $v_p$ 's naboer i det indre af  $G$  i denne rækkefølge;
13      omindeksér  $u_1, \dots, u_m$  så at
       $\{v_p, \dots, v_{p+m-1}\} = \{u_m, \dots, u_1\}$ ;
14      vælg  $x, y \in S(v_p) - \{c_a\}$ , så at  $x \neq y$ ;
15      erstat  $S(u_k)$  af  $S(u_k) - \{x, y\}$ ;
16      Farv( $G - \{v_p\}, v_a, v_b, c_a, c_b, p - 1, p + m - 1$ );
17      farvelæg det fjernede punkt  $v_p$  med en af farverne
       $x$  eller  $y$ ;

```

END Farv

Algoritmen Farv tager som argumenter:

1. En nærtriangulering  $G$ ,  $|V(G)| \geq 3$ . Denne skal være givet på en helt speciel form:
  - Ethvert punkt  $v_i \in G$  har et flag som indikerer om  $v_i \in C$ . Dette bruges til at undersøge  $C$  for diagonaler.

- Ethvert punkt  $v_i \in G$  har en liste bestående af højst 5 farver. (Højst 3 farver for  $v_i \in C$ ).
- Ethvert punkt  $v_i \in G$  har en ordnet liste af nabopunkter. Nabopunkterne er ordnet efter deres rækkefølge i den cykliske orden (med uret), i hvilken de optræder i den givne plane repræsentation, (se C. Thomassen [6]). Hvis  $m, n \in N(x)$  og kanten  $xn$  kommer umiddelbart efter kanten  $xm$  i den plane repræsentation af  $G$  når man betragter kanterne i rækkefølge omkring  $x$  med uret, vil funktionen  $\pi_x : N(x) \mapsto N(x)$  returnere “efterfølgeren” til det givne nabopunkt, altså i dette tilfælde  $\pi_x(m) = n$ . Man kan således lade nabopunkterne optræde i en dobbeltlænket liste, hvor forgængerer peger på efterfølgeren vha. en pointer, og omvendt, så at der hurtigt kan opnås tilgang til et punkt  $x$ 's forgænger og efterfølger med funktionerne  $\pi_x$  og  $\pi_x^{-1}$ . Derudover har ethvert punktelement  $v_i$  i  $v_j$ 's naboliste en pointer til elementet  $v_j$  i  $v_i$ 's naboliste. Disse bruges til at opdatere nabolisterne for punkter efter en deling af grafen.
- Ethvert punkt  $v_i \in C \subseteq G$  har en pointer til de elementer i dets naboliste, der repræsenterer naboelementerne til  $v_i$  på  $C$ . Disse pointere bruges til hurtigt at finde startstedet for en søgning efter diagonaler som  $v_i$  eventuelt indgår i, samt til opdatéring af nabolister.
- Ethvert element i nabolisten til  $v_i \in G$  har en pointer til  $v_i$ .
- Ethvert punkt  $v_i \in G$  har en heltalsvariabel som repræsenterer dens farve. Denne variabel har en dummyværdi (f. eks  $-1$ ) indtil  $v_i$  farvelægges.
- Ethvert punkt  $v_i \in C \subseteq G$  har en pointer til sine 2 naboer på  $C$ .  $C$  udgør således en dobbeltlænket liste i  $G$ .

- Ethvert punkt  $v_i \in G$  har 1 heltalsvariabel til brug for indexering af punkterne på den ydre kreds  $C$ . Denne variabel har en dummyværdi (f.eks -1) hvis  $v_i \notin C$ , og indexværdien (mellem 1 og  $p$ ) hvis  $v_i \in C$ .
2. Nabopunterne  $v_a, v_b \in C \subseteq G$ . Disse har rollerne som hhv.  $v_1$  og  $v_2$  fra beviset.
  3.  $v_a$  og  $v_b$ 's farver benævnt  $c_a$  og  $c_b$ . Disse medtages kun pga. analysen af algoritmen, da et punkts farve i denne datastruktur er givet i punktets repræsentation.
  4. Intervalendepunktsindexer  $q$  og  $r$ . For  $v_i \in C$ ,  $q \leq i \leq r$  skal algoritmen undersøge om  $v_i$  er endepunkt for en diagonal i  $C$ . Hvis  $q > r$  undersøges ingen punkter for diagonaler.

**Sætning 4.2.2.** *Algoritme 4.2.1 udfører en 5-listefarvning af grafen  $G$  i et antal skridt der ikke overstiger en fast, lineær funktion af  $n = |V(G)|$ , ved kaldet Farv( $G, v_1, v_2, 1, 2, v_1, v_p$ ), givet at  $G$  er en nærtriangulering.*

*Bevis.* Det bevises at det samlede antal gange (over *alle* rekursive kald) en vilkårlig anden funktion end Farv i Algoritme 4.2.1 kaldes ikke overstiger en fast, lineær funktion af  $n$ .

Den første Hvis-betingelse er kun opfyldt hvis den givne graf  $G$  er en trekant. Da hver kant i  $G$  kun kan være med i højst 2 trekanter, og da  $|E(G)| \leq 3n - 6$  fordi  $G$  er planar, kan denne Hvis-betingelse højst være opfyldt  $2n - 4 \in O(n)$  gange ialt for grafen  $G$ . At farvelægge det ufarvede punkt i en trekant består eventuelt af at finde det ufarvede punkt blandt 3 punkter, samt af at vælge én farve blandt højst 5. Dette kan gøres med et konstant antal operationer.

At kunne kalde Farv med intervallet fra  $q$  til  $r$  sikrer at et punkt på  $C$  kun undersøges 1 gang for om det er med i en diagonal. Dette er tilstrækkeligt, idet et punkt som én gang er "frikendt"

for at være med i en diagonal kun kan udgøre en diagonal i en delgraf, hvis det andet endepunkt af denne diagonal er et punkt som er introduceret på  $C$  efter “frikendelsen”. Man kan således nøjes med at undersøge alle kanter udgående fra punkter på  $C$  i den oprindelige graf 1 gang, samt kanterne udgående fra de nye punkter på  $C$  1 gang. Kommandoen i l. 6, “undersøg om  $v_i \dots$ ” udføres således højst én gang pr. punkt i  $G$ . Da et punkt godt kan have mange naboer (dvs.  $O(n)$ ), skal det vises at en sekvens af “undersøg” kommandoer ikke reelt er  $O(n)$  diagonalcheck for  $n$  punkter, altså  $O(n^2)$  operationer. Undersøgelsen af om et punkt  $v_i \in C$  er endepunkt for en diagonal vil i praksis bestå af at undersøge om  $y \in C$  for alle  $y \in N(v_i)$  vha  $C$ -flaget i hvert punkt. Igen kan det benyttes at  $|E(G)| \leq 3n - 6$ ; da hvert punkt kun undersøges 1 gang for diagonaler, bliver en kant højst checket 2 gange for om den skulle være en diagonal. I alt gennemføres derfor højst  $6n - 12 \in O(n)$  diagonalitetscheck for  $G$ .

Det element i nabolisten, som diagonalitetsundersøgelsen af  $v_i$  starter hos, er forgængerelementet til  $v_i$ 's forgænger på  $C$ . Dette element kan findes i et fast antal skridt, da  $v_i$  har en pointer til elementet der repræsenterer  $v_i$ 's forgænger i nabolisten. Rækkefølgen af diagonalitetsundersøgelsen af  $v_i$ 's nabopunkter er “imod uret”. Når en diagonal identificeres i undersøgelsen stoppes undersøgelsen.

Opdelingen af  $G$  i to mindre grafer i l. 8, kan gennemføres ved i  $G_1$  at  $v_i$ 's efterfølger på  $C$  bliver sat til at være  $v_j$ , hvis forgænger bliver sat til at være  $v_i$  (flytning af 2 pointer). Derudover skal den nye efterfølger til  $v_i$ 's forgænger (kaldet  $v_\alpha$ ) på  $C$  i  $v_i$ 's naboliste sættes til at være  $v_j$  som så får forgænger  $v_\alpha$  (flytning af 4 pointer). Hurtig adgang til elementerne  $v_\alpha$  og  $v_j$  i  $v_i$ 's naboliste, og  $v_i$  i  $v_j$ 's naboliste er sikret ved at

- $v_i$  har en pointer til  $v_\alpha$ -elementet, da det er  $v_i$ 's forgænger på  $C$ ,

- diagonalitetschecket standsede ved  $v_j$ -elementet, og
- $v_j$ -elementet har en pointer til  $v_i$ -elementet.

Da  $v_i$  og  $v_j$  har fået ny efterfølger hhv. forgænger på  $C$  (hhv.  $v_j$  og  $v_i$ ), skal de to punkter hver flytte 1 pointer til den nye  $C$ -nabos element i deres respektive nabolister. Dette kan gøres i et fast antal skridt, igen fordi diagonalitetschecket standsede ved  $v_j$ -elementet i  $v_i$ 's naboliste. Tilsvarende operationer udføres for  $G_2$ .

Erstatningen af  $v_p$  med  $v_p$ 's nabopunkter i det indre af  $G$  i linje 12 kan igen se ud til at indbefatte  $O(n)$  punkter for hver gang denne kommando udføres, og igen er det antallet af kanter i  $G$  på højst  $3n - 6$  der sikrer at kompleksiteten af algoritmen ikke bliver  $O(n^2)$ . Ethvert punkt kan nemlig højst blive omplaceret fra det indre af  $G$  til  $G$ 's ydre kreds  $C$  1 gang, og da ethvert punkt der flyttes ud på  $C$  bliver flyttet pga. at det er endepunkt i en kant gående fra  $C$  til  $G$ 's indre, er antallet af disse flytninger således begrænset af kanttallet. Flytningen af  $v_p$ 's nabopunkter til den ydre kreds vil i praksis foregå ved at  $v_p$  lokaliseres vha. en pointer fra  $v_a$ ,  $u_1$ -elementet lokaliseres i  $v_p$ 's naboliste som efterfølgeren til  $v_a$ -elementet,  $u_1$ '  $C$ -flag hejses og  $v_a$ 's nye nabo på  $C$  sættes til  $u_1$  som får  $C$ -nabo  $v_a$ . Tilsidst skæres  $v_p$  ud af  $u_1$ 's naboliste (flytning af 4 pointerne). Herefter findes  $u_i$ -elementerne iterativt ved at følge pointerne i  $v_p$ 's naboliste, deres  $C$ -flag hejses, deres ene  $C$ -nabo sættes til at være forgængeren i  $v_p$ 's naboliste, og  $v_p$  skæres ud af  $u_i$ 's naboliste. Denne proces fortsættes indtil man når til  $v_{p-1}$ , hvor  $v_p$  fjernes fra nabolisten.

Omindexeringen i linje 13 udføres ved at man blot følger  $C$ -nabopointerne iterativt fra  $v_{p-1}$  og ændrer index på punkterne indtil man når  $v_a$ . Argumentet for at der højst vil blive udført  $O(n)$  operationer over alle kald af Farver det samme som for "erstat ..." i linje 12 da det er operationer på den samme mængde af punkter.

I linje 14 vælges 2 farver fra det fjernede punkt  $v_p$ 's liste. Da



der højst kan fjernes  $12n - 24^1$  punkter fra grafen  $G$  og/eller dens delgrafer på denne måde, og da listerne alle højst har længde 5, vil det samlede antal skridt som denne operation bruger ikke overstige  $O(n)$ .

Operationen på listerne for de nyintroducerede punkter på  $C$  i linje 15 kan udføres samtidig med oindexeringen i en separat subrutine i linje 13<sup>2</sup>, men er skrevet som selvstændige kommandolinjer for overskuelighedens skyld. Da der blot skal fjernes 2 elementer fra en liste på 5 elementer fra ialt højst  $n - 3$  punkter over alle kald af Farv, vil denne kommando højst medføre  $O(n)$  operationer ialt.

Kommandoen i linje 17 kaldes højst 1 gang for hvert punkt (eventuelt fordoblet et antal gange) på  $C$ , dvs. højst  $O(n)$  gange, thi ethvert punkt kan højst fjernes og derefter farves 1 gang over alle kald af Farv.

Da ingen af kommandoerne i Algoritme 4.2.1 medfører mere end  $O(n)$  operationer over *alle* kald af Farv, vil Algoritme 4.2.1 således fuldføre en farvning i  $O(n)$  skridt.  $\square$

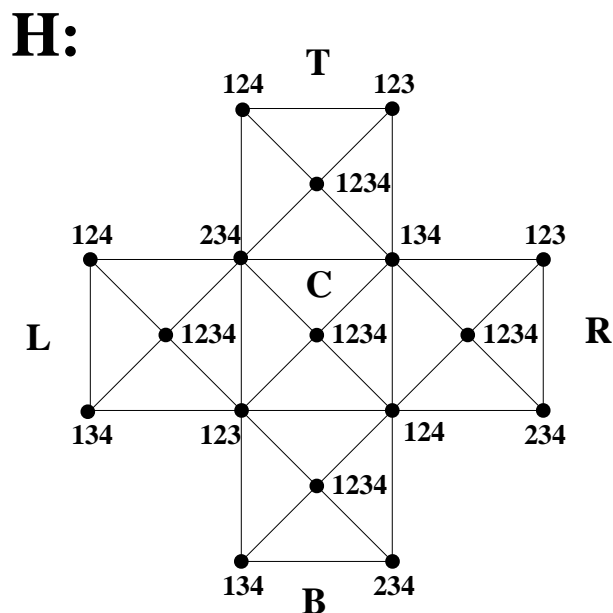
### 4.3 Et eksempel på en ikke-4-listefarvelig, plan graf

Som et eksempel på en planar graf (som faktisk viser sig at være en nærtriangulering) der ikke er 4-listefarvelig, bringes her en graf konstrueret af M. Mirzakhani (se [11]). Det *første* eksempel på en ikke-4-listefarvelig planar graf blev præsenteret af M. Voigt i [12], se iøvrigt de historiske noter bagest i kapitlet.

**Eksempel 4.3.1.** Betragt figur 4.3. Grafen  $H$  er ikke listefar-

<sup>1</sup>Der er højst  $3n - 6$  diagonaler i  $G$ . For hver diagonal bliver 2 punkter "fordoblet" ved delingen af grafen i 2 mindre grafer, altså højst  $12n - 24$  punkter ialt. Dette er en meget grov øvre grænse!

<sup>2</sup>Dette kræver dog at operationen i linje 14 rykkes til umiddelbart før linje 13.



Figur 4.3: Grafen  $H$  er ikke listefarvelig med de på figuren angivne lister.

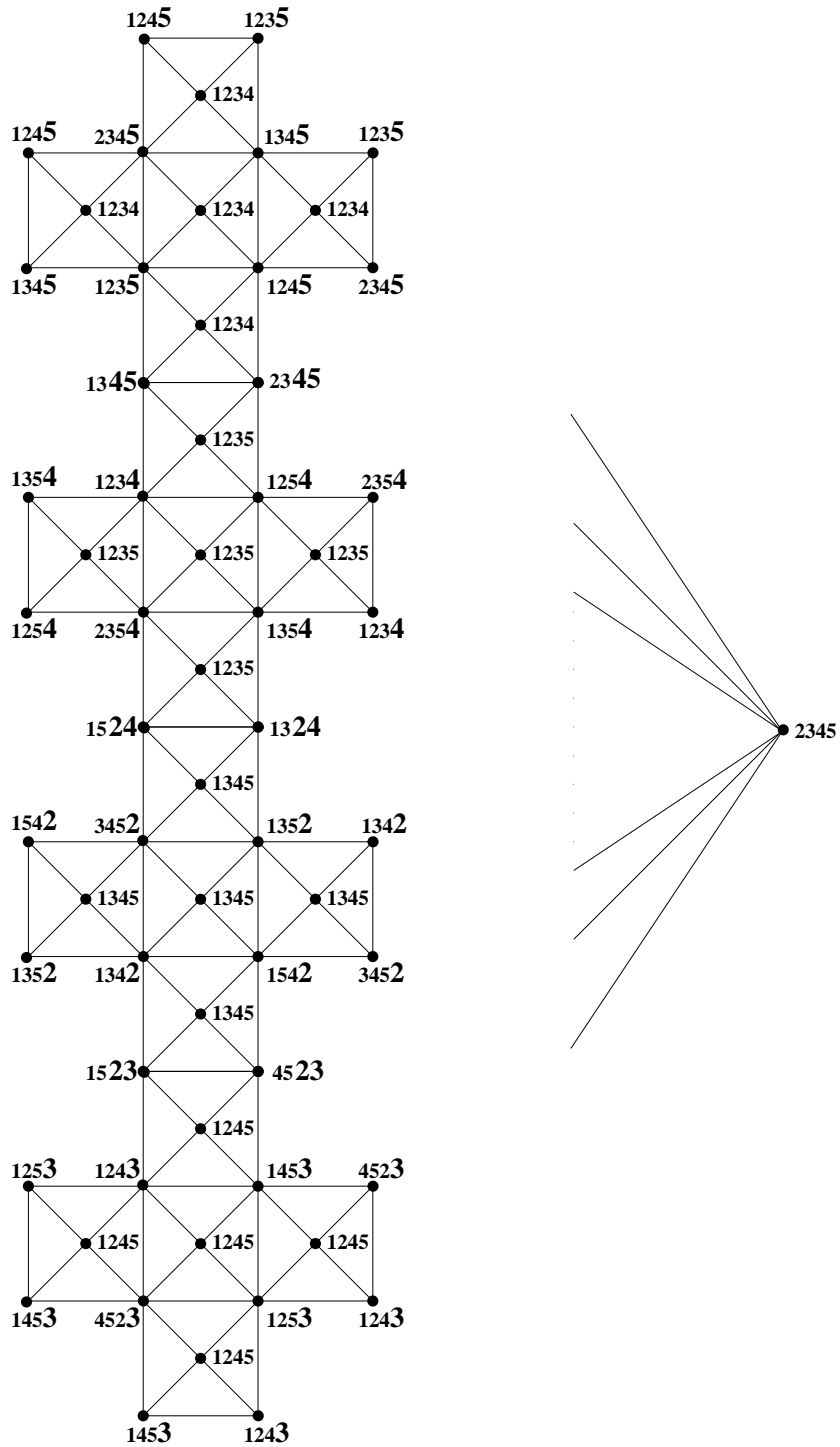
velig mht. de i figuren angivne lister, hvilket ses af følgende argument: Bemærk følgende egenskaber for  $V$ :  $|V(H)| = 17$ , de 4 “indre” punkter i  $H$  har lister af længde 4, og de resterende punkter har lister af længde 3. Der kan identificeres 5 kvadrater i  $H$  som i figuren er benævnt  $T$ ,  $R$ ,  $B$ ,  $L$  og  $C$ , inspiréret af deres placering i figuren.

Idet hvert centerpunkt i hvert af kvadraterne kun kan få én af farverne 1, 2, 3, og 4, ses det at mindst 2 af de “modsatstående” hjørnepunkter får samme farve i hvert af kvadraterne. Denne egenskab kaldes *egenskab P*.

Følgende påstand kan nu fremsættes: I enhver listefarvning af  $H$  vil enten punktet øverst til højre i kvadrat  $C$  ( $\emptyset HC$ ) få farven 1, eller punktet øverst til venstre i kvadrat  $C$  ( $\emptyset VC$ ) vil få farven 2. Dette ses ved at antage det modsatte, nemlig at punktet ( $\emptyset HC$ ) *ikke* får farven 1, og punktet ( $\emptyset VC$ ) ikke får farven 2. Dette medfører 2 tilfælde

1. ( $\emptyset HC$ ) får farven 3, hvilket iflg. egenskab P anvendt på kvadrat

4.3. ET EKSEMPEL PÅ EN IKKE-4-LISTEFARVELIG, PLAN GRAF 51



Figur 4.4: En ikke-4-listefarvelig graf.

$T$  medfører at punktet  $(\emptyset VC)$  også får farven 3, hvilket ikke er muligt i en listefarvning.

2.  $(\emptyset HC)$  får farven 4, hvilket iflg. egenskab P anvendt på kvadrat  $C$  medfører at punktet  $(\emptyset VC)$  også får farven 4, hvilket ikke er muligt i en listefarvning.

Hvis punktet  $(\emptyset HC)$  i kvadrat  $C$  får farven 1, vil anvendelsen af egenskab P i kvadrat  $R$  medføre at punktet nederst til højre i kvadrat  $C$  får farven 2; egenskab P anvendt på kvadrat  $B$  giver så at punktet nederst til venstre i kvadrat  $C$  får farven 3. Dette medfører vha. egenskab P på kvadrat  $L$ , at punktet  $(\emptyset VC)$  får farven 4, hvilket sammenholdt med farverne på de andre hjørnepunter er i modstrid med egenskab P anvendt på kvadrat  $C$ .

Hvis  $(\emptyset VC)$  farves med farven 2 vil et lignende argument føre til en modstrid, og det er dermed vist at  $H$  ikke kan farves med de givne lister.

Tag nu 4 disjunkte kopier af  $H$ ;  $H_1, H_2, H_3$ , og  $H_4$ , og tilføj farven  $4+i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , til ethvert ydre punkt i  $H_i$  (dvs. ethvert punkt med liste af længde 3 i kopierne af  $H$ ). Tilføj derudover et nyt punkt  $v$  med farvelisten  $\{5, 6, 7, 8\}$ , og forbind  $v$  med alle ydre punkter i alle  $H_i$ 'erne. Grafen der fremkommer ved denne konstruktion er planar og ikke 4-listefarvelig. Thi farves  $v$  med farven  $4+i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , vil de ydre punkter i  $H_i$  ikke kunne farves med denne farve og resten af  $H_i$  kan således ikke listefarves med de givne restlister, da denne er en kopi af den ikke-listefarvelige graf  $H$ .

Dette eksempel på en ikke-4-listefarvelig planar graf kan gøres endnu mindre ved at lade 6 punkter i  $H_i$ 'erne "overlappe" hinanden, dvs. identificere dem med hinanden, se figur 4.4. Denne graf har 63 punkter.

Det ses yderligere at grafen i figur 4.4 er 3-farvelig (fjern centerpunkterne i hvert kvadrat; restgrafene er 2-farvelige, og tilføjes centerpunkterne igen kan de alle få en tredje farve).

Historisk:

Carsten Thomassens bevis for 5-listefarvelighed ([5]) af planare grafer blev offentliggjort i 1994. Beviset er en bekræftelse af formodningen om at alle planare grafer er 5-listefarvelige, som blev fremsat af V. G. Vizing i 1975, og uafhængigt heraf, af P. Erdős, A. L. Rubin og H. Taylor i 1979 i [1].

En anden formodning som blev fremsat i [1] var at der eksisterede planare grafer som ikke var 4-listefarvelige, altså en formodning om at 4-farvesætningen ikke ville kunne udvides til listefarvelighed. Det første eksempel på en planar graf der *ikke* er 4-listefarvelig blev præsenteret af M. Voigt i [12] i 1993, altså før C. Thomassens bevis. Denne graf har 238 punkter og er en nærtriangulering.

Det i dette kapitel bragte eksempel på en ikke-4-listefarvelig graf, konstrueret af M. Mirzakhani i 1996, se [11], har “kun” 63 punkter, og kan desuden let påvises at være 3-farvelig. Den er dermed også svar på spørgsmålet stillet af T. R. Jensen og B. Toft i [13, side 46-47]; er enhver 3-farvelig planar graf 4-listefarvelig? Svaret er således nej.

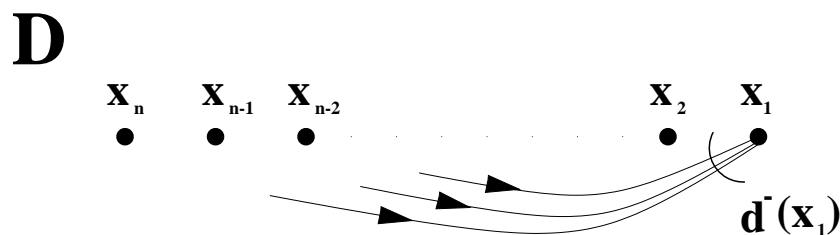


# Kapitel 5

## Listefarvning og polynomier

### 5.1 Acykliske orienteringer og listefarvning

Lad  $D$  være en orienteret, acyklisk graf.  $D$  kan da  $(d^+(x) + 1)$ -listefarves. Betragt figur 5.1. Da  $D$  er acyklisk vil der være mindst



Figur 5.1:  $D$  er en orienteret, acyklisk graf. Fjernes et punkt med udvalens 0 successivt fra den aktuelle version af  $D$ , fås en rækkefølge af punkter,  $x_1, \dots, x_n$ , i hvilken  $D$  kan  $(d^+(x_i) + 1)$ -listefarves,  $1 \leq i \leq n$ .

ét punkt med udvalens 0. En ordning af punkterne i  $D$  kan opnås på følgende måde:

Sæt  $D_1 = D$ . I det  $i$ 'te skridt i processen vælges blandt punkterne i  $D_i$  et punkt med udvalens 0, f.eks. det sidste punkt på en maximal ensrettet vej. Der eksisterer mindst 1 sådant punkt i  $D_i$ , da  $D$  og dermed alle delgrafer af  $D$  er acykliske. Dette punkt kaldes  $x_i$ . Herefter sættes  $D_{i+1} = D_i - \{x_i\}$ , og der gøres til skridt  $i + 1$ . Processen ender efter skridt  $n$ .

$D$  kan nu  $(d^+(x_i) + 1)$ -listefarves i rækkefølgen  $x_1, \dots, x_n$ , idet det  $i$ 'te punkt er forbundet med  $d^+(x_i)$  tidligere farvede punkter, og dermed højst har  $d^+(x_i)$  "forbudte" farver i sin liste.

## 5.2 Eulerske orienteringer

Alon, [7], og Alon og Tarsi [8] beskriver et andet (svagere) krav til en orientering end acykliskhed som også sikrer  $(d^+(x) + 1)$ -listefarvelighed, for  $x \in D$ , når  $D$  er en orienteret graf. Til denne udvidelse bruges følgende

**Definition 5.2.1.** En orienteret delgraf  $H$  af en orienteret graf  $D$ , hvor  $V(H) = V(D)$  kaldes *Eulersk*, hvis der gælder, at  $\forall v \in V(D) : d_H^-(v) = d_H^+(v)$ .  $H$  kaldes *lige* hvis  $H$  har et lige antal kanter, ellers kaldes  $H$  *ulige*. Med  $EE(D)$  og  $EO(D)$  benævnes antallet af lige hhv. ulige Eulerske delgrafer af  $D$ .

Til beviset for hovedsætningen, Sætning 5.3.1, skal der bruges et vigtigt værktøj, det såkaldte *grafpolynomie*. Grafpolynomiet for en (ikke-orienteret) graf  $G$ ,  $f_G(x_1, \dots, x_n)$  på punktmængden  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ , er defineret ved

$$f_G(x_1, \dots, x_n) = \prod \{(x_i - x_j) : i < j, v_i v_j \in E(G)\} \quad (5.1)$$

Grafpolynomiet for grafen  $G$ ,  $f_G(x_1, \dots, x_n)$ , ses at være entydigt bestemt for en givet nummerering af punkterne i  $G$ . Ganges produktet i (5.1) ud, vil hvert led i denne form af grafpolynomiet være på formen

$$c_j x_1^{\alpha_1^j} x_2^{\alpha_2^j} \cdots x_n^{\alpha_n^j} \quad (5.2)$$

hvor  $j$ ,  $0 \leq j \leq m$ , indikerer at det er det  $j$ 'te af de ialt  $m$  led, hvor  $c_j \in \mathbf{Z}$  og for alle  $j$ ,  $0 \leq j \leq m$ , gælder der at  $\sum_{i=1}^n \alpha_i^j = |E(G)|$ , thi leddene fremkommer ved at der fra hver parentes i



produktet i (5.1) indgår netop ét  $x_i$  (med fortegn), og antallet af parenteser er præcis  $|E(G)|$ . Hvert af de  $m$  led (5.2) i  $f_G$  kan således opfattes som en orientering af grafen  $G$ , hvor de  $x_i$ 'er der indgår i leddet repræsenterer punkter  $v_i$ , hvorfra de orienterede kanter udgår, og  $\alpha_i^j$  er punktet  $v_i$ 's udvalens i orientering  $j$ . Mere præcist kan følgende fremgangsmåde benyttes (se [8]): For hver orienteret kant  $e = (v_i, v_j) \in E(G)$  defineres vægten af kanten  $e$ ,  $w(e)$  ved

$$w(e) = \begin{cases} x_i & \text{hvis } i < j \\ -x_i & \text{hvis } i > j \end{cases}$$

Vægten  $w(D)$  af en orientering  $D$  af grafen  $G$  defineres til at være produktet  $\prod w(e)$ , hvor  $e$  løber over mængden af alle orienterede kanter  $e$  i  $D$ . Det ses således at  $f_G = \sum w(D)$ , hvor  $D$  løber over mængden af alle orienteringer  $D$  af  $G$ .

### 5.3 Hovedsætningen, et resultat af Alon og Tarsi

**Sætning 5.3.1.** *Lad  $D$  være en orienteret graf. Hvis  $EE(D) \neq EO(D)$  kan  $D$   $(d_D^+(v) + 1)$ -listefarves.*

*Bevis for Sætning 5.3.1.* Lad  $D = (V, E)$  være en orienteret graf med punktmængde  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  og sæt  $d_i = d_D^+(v_i)$ , udvalensen af  $v_i$ . Antag at  $EE(D) \neq EO(D)$ . For  $1 \leq i \leq n$  sættes  $S_i$  til at være en liste af  $|S_i| = d_i + 1$  forskellige farver hørende til punktet  $v_i$ . Antag nu at det for en tildeling af lister,  $S_i$ , til punkterne  $v_i$  ikke er muligt at listefarve  $D$ . Lad  $G$  være den ikke-orienterede underliggende graf af  $D$ , altså den graf der fremkommer ved at gøre de orienterede kanter i  $D$  ikke-orienterede, og lad  $f_G = f_G(x_1, \dots, x_n)$  være grafpolynomiet for  $G$ . Antagelsen om ikke-listefarvelighed af  $D$  for de givne lister  $S_i$  er ækvivalent med

udsagnet

$$\begin{aligned} f_G(x_1, \dots, x_n) &= 0 \text{ for alle } n\text{-tupler} \\ (x_1, \dots, x_n) &\in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Det ses af at hvis  $D$  ikke er listefarvelig for listerne  $S_i$ , vil der for ethvert forsøg på at listefarve  $D$  med farver fra  $S_i$ 'erne være mindst ét sæt naboer, f.eks  $v_a$  og  $v_b$ , der får samme farve,  $\alpha$ , hvilket i  $f_G$  viser sig ved at den tilhørende faktor,  $(x_a - x_b) = (\alpha - \alpha)$  er 0.

For hvert  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sættes polynomiet  $Q_i(x_i)$  til at være

$$Q_i(x_i) = \prod_{s \in S_i} (x_i - s) = x_i^{d_i+1} - \sum_{j=0}^{d_i} q_{ij} x_i^j. \quad (5.4)$$

Det ses let af (5.4) at

$$x_i \in S_i \Rightarrow Q_i(x_i) = 0, \text{ dvs., } x_i^{d_i+1} = \sum_{j=0}^{d_i} q_{ij} x_i^j. \quad (5.5)$$

Lad  $\bar{f}_G$  være polynomiet der fremkommer ved at omskrive  $f_G$  som en sum af led på form som i (5.2), og ved brug af relationerne i ((5.5)) successivt udskifte hver forekomst af  $x_i^{d_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , hvor  $d'_i > d_i$ , med en linearkombination af mindre potenser af  $x_i$ . I polynomiet  $\bar{f}_G$  der opnås ved denne omskrivning har  $x_i$  således grad højst  $d'_i$  for alle  $1 \leq i \leq n$ .

Desuden er  $\bar{f}_G(x_1, \dots, x_n) = f_G(x_1, \dots, x_n)$  for alle  $n$ -tupler  $(x_1, \dots, x_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$  pga. (5.5) og dermed giver (5.3) at  $\bar{f}_G(x_1, \dots, x_n) = 0$  for enhver  $n$ -tuple  $(x_1, \dots, x_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ . På dette sted i beviset får vi brug for følgende 2 lemmaer og et korollar:

**Lemma 5.3.2.** *Lad  $P = P(x_1, \dots, x_n)$  være et polynomie i  $n$  variable. Antag at for  $1 \leq i \leq n$  er graden af  $P$ , betragtet som et polynomie i  $x_i$ , højst  $d_i$ , og lad  $S_i \subset \mathbf{Z}$  være en mængde af*

$d_i + 1$  forskellige heltal. Hvis  $P(x_1, \dots, x_n) = 0$  for alle  $n$ -tupler  $(x_1, \dots, x_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ , så er  $P \equiv 0$ .

*Bevis for Lemma 5.3.2.* Der anvendes induktion over  $n$ . For  $n = 1$  udsiger lemmaet at et polynomie i én variabel, som ikke er nulpolynomiet, og som har grad  $d_1$  højst kan have  $d_1$  forskellige rødder.

Under antagelse af at lemmaet er sandt for  $n - 1$  bevises det for  $n$ ,  $n \geq 2$ . Givet et polynomie  $P = P(x_1, \dots, x_n)$  og mængder  $S_i$  som opfylder kravene i lemmaet, kan  $P$  skrives som et polynomie i  $x_n$ ;  $P = \sum_{i=0}^{d_n} P_i(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^i$ , hvor hvert  $P_i$  er et polynomie med en  $x_j$ -grad der er begrænset af  $d_j$ . For hver fast  $(n - 1)$ -tuple  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in S_1 \times \dots \times S_{n-1}$  er polynomiet i  $x_n$ , der opnås ved at substituere værdierne af  $x_1, \dots, x_{n-1}$  ind i  $P$ , nul for alle  $x_n \in S_n$ , og dermed identisk lig nul idet det dermed er et polynomie af grad  $d$  med  $d + 1$  forskellige rødder. Derfor må  $P_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$  for alle  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in S_1 \times \dots \times S_{n-1}$ , som ifølge induktionsantagelsen medfører at  $P_i \equiv 0$  for alle  $i$ , hvilket giver at  $P \equiv 0$ , og lemmaet er hermed bevist.  $\square$

**Lemma 5.3.3.** Lad  $f_G(x_1, \dots, x_n)$  være grafpolynomiet for grafen  $G$ . Kald en kant  $(v_i, v_j)$  i  $G$  for aftagende hvis  $i > j$ , og kald en orientering  $D$  af  $G$  lige hvis den har et lige antal aftagende kanter, ellers kaldes den ulige. Lad for ikke-negative  $d_1, \dots, d_n$ ,  $DE(d_1, \dots, d_n)$  og  $DO(d_1, \dots, d_n)$  betegne antallet af hhv. lige og ulige orienteringer af  $G$  i hvilke udvalensen af punktet  $v_i$  er  $d_i$  for  $1 \leq i \leq n$ .

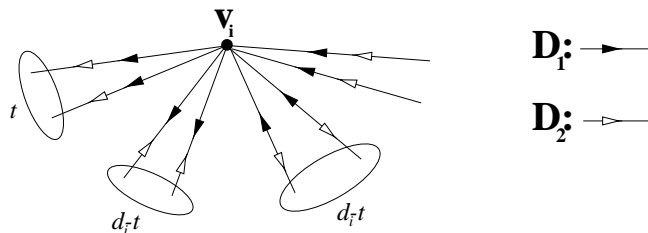
Så er

$$f_G(x_1, \dots, x_n) = \sum_{d_1, \dots, d_n \geq 0} \left( |DE(d_1, \dots, d_n)| - |DO(d_1, \dots, d_n)| \right) \prod_{i=1}^n x_i^{d_i} \quad (5.6)$$

*Bevis for Lemma 5.3.3.* Ifølge diskussionen af korrespondencen mellem led i  $f_G$  og orienteringer af grafen  $G$  på side 57, er  $f_G = \sum w(D)$ , altså så at sige “summen af  $G$ 's orienteringer”. Da hver aftagende kant  $(v_i, v_j)$ ,  $i > j$ , i en orientering  $D$  af  $G$  medfører at  $-x_i$  medtages i produktet  $\prod w(e) = w(D)$ , vil dette produkts fortegn afhænge af om der er et lige eller ulige antal aftagende kanter i orienteringen  $D$  af  $G$ ; positivt for et lige antal, negativt for et ulige. Antallet af positive led af typen  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}$  i  $f_G$  er derfor  $|DE(d_1, \dots, d_n)|$ , og antallet af negative led af denne type i  $f_G$  er  $|DO(d_1, \dots, d_n)|$ . Ialt er antallet af led af typen  $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}$  i  $f_G$  derfor  $|DE(d_1, \dots, d_n)| - |DO(d_1, \dots, d_n)|$ , hvilket medfører ligning (5.6).  $\square$

**Korollar 5.3.4.** *Lad  $D$  være en orientering af en ikke-orienteret graf  $G = (V, E)$  på mængden  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  af punkter. For  $1 \leq i \leq n$  sættes  $d_i = d_D^+(v_i)$  til at være  $v_i$ 's udvalens i  $D$ . Så er absolutværdien af koefficienten til leddet  $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$  i standardrepræsentationen af  $f_G = f_G(x_1, \dots, x_n)$  som en linearkombination af led,  $|EE(D) - EO(D)|$ . Specielt er denne koefficient forskellig fra nul, hvis  $EE(D) \neq EO(D)$ .*

*Bevis for Korollar 5.3.4.* Lad der være givet en fast sekvens af positive heltal  $d_1, \dots, d_n$  og lad  $D_1$  være en fast orientering i  $DE(d_1, \dots, d_n) \cup DO(d_1, \dots, d_n)$ . For en vilkårlig orientering  $D_2 \in DE(d_1, \dots, d_n) \cup DO(d_1, \dots, d_n)$  defineres  $D_1 \oplus D_2$  som mængden af alle orienterede kanter i  $D_1$ , hvis orientering er modsat i  $D_2$ . Da udvalensen for ethvert punkt  $v_i$  er den samme i  $D_1$  og  $D_2$ , nemlig  $d_i$ , er  $D_1 \oplus D_2$  en Eulersk delgraf af  $D_1$  (og desuden af  $D_2$ ). Dette indses vha. følgende (betragt figur 5.2): Punktet  $v_i$  har samme udvalens,  $d_i$ , i  $D_1$  og  $D_2$ . Kaldes antallet af kanter, som går ud fra  $v_i$  i både  $D_1$  og  $D_2$  for  $t$ , ses det let at antallet af kanter der går ud fra  $v_i$  i  $D_1$ , men ind til  $v_i$  i  $D_2$  må være  $d_i - t$ . Ligeledes må antallet af kanter der går ud fra  $v_i$  i  $D_2$ , men ind til  $v_i$  i  $D_1$  være  $d_i - t$ . Derfor gælder der for alle  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , at an-



Figur 5.2:  $v_i$  er et punkt i orienteringerne  $D_1$  og  $D_2$  af en graf  $G$ . Orienteringen af kanterne i  $D_1$  er markeret med en solid, sort pil, og orienteringen i  $D_2$  med en åben pil.

tallet af kanter i  $D_1 \oplus D_2$ , som er udadgående  $D_1$ -kanter er  $d_i - t$ , og antallet af kanter i  $D_1 \oplus D_2$  som er indadgående  $D_1$ -kanter er  $d_i - t$ , og  $D_1 \oplus D_2$  er dermed Eulersk.

$D_1 \oplus D_2$  ses at være en Eulersk delgraf af  $D_1$  med et lige antal kanter hvis og kun hvis enten  $D_1$  og  $D_2$  begge er lige, eller de begge er ulige. Dette skyldes at der er 2 forskellige slags kanter (type 1 og 2 nedenfor) i  $D_1 \oplus D_2$ , og 2 forskellige slags kanter (type 3 og 4 nedenfor) der ikke er med i  $D_1 \oplus D_2$ . Disse ialt 4 typer af kanter er

1. Kanter der er aftagende i  $D_1$  og ikke-aftagende i  $D_2$ .  
Deres antal kaldes  $x$ .
2. Kanter der er ikke-aftagende i  $D_1$  og aftagende i  $D_2$ .  
Deres antal kaldes  $y$ .
3. Kanter der er aftagende i både  $D_1$  og  $D_2$ .  
Deres antal kaldes  $z$ .
4. Kanter der er ikke-aftagende i både  $D_1$  og  $D_2$ .

At antallet af aftagende kanter i  $D_1$  og  $D_2$  har samme paritet betyder at  $(x + z)$  (som er antallet af aftagende  $D_1$ -kanter) og  $(y + z)$  (som er antallet af aftagende  $D_2$ -kanter) har samme paritet, hvilket medfører at  $x$  og  $y$  har samme paritet. Da antallet af kanter i  $D_1 \oplus D_2$  er  $(x + y)$ , vil dette tal i denne situation være lige.

Omvendt ses det at et lige antal kanter i  $D_1 \oplus D_2$  medfører at  $x$  og  $y$ , og dermed også at  $(x + z)$  og  $(y + z)$ , har samme paritet, så at det kan konkluderes at  $D_1 \oplus D_2$  er en Eulersk delgraf af  $D_1$  med et lige antal kanter hvis og kun hvis enten  $D_1$  og  $D_2$  begge er lige, eller de begge er ulige.

Betragtes afbildningen  $D_2 \rightarrow D_1 \oplus D_2$ , ses den at være en bijektion mellem  $DE(d_1, \dots, d_n) \cup DO(d_1, \dots, d_n)$  og mængden af alle Eulerske delgrafer af  $D_1$ . Thi hvis det antages at 2 orienteringer,  $D_2^1, D_2^2 \in DE(d_1, \dots, d_n) \cup DO(d_1, \dots, d_n)$ , der afbildes over i den samme Eulerske delgraf  $D_1 \oplus D_2$  er forskellige, må de have modsatte rettede orienteringer af den samme kant  $e$  i  $G$ . Men så må  $e$ 's orientering i den ene af orienteringerne (antag uden tab af generalitet at det er  $D_2^1$ ) stemme overens med orienteringen af  $e$  i  $D_1$ , og være modsat i den anden orientering,  $D_2^2$ . Dette vil medføre at  $e$  er med i den Eulerske delgraf som  $D_2^2$  afbildes over i, men ikke i den Eulerske delgraf som  $D_2^1$  afbildes over i, hvilket strider imod antagelsen. Da  $D_2^1$  og  $D_2^2$  således må være identiske hvis de afbildes over i den samme Eulerske delgraf af  $D_1$ ,  $D_1 \oplus D_2$ , er afbildningen  $D_2 \rightarrow D_1 \oplus D_2$  1-1.

For fast  $D_1$  er det i det foregående vist at enhver orientering af  $G$  afbildes over i en Eulersk delgraf af  $D_1$  vha. operationen  $D_1 \oplus D_2$ . Haves der derimod en Eulersk delgraf  $H$  af  $D_1$ , hvor  $D_1 \in DE(d_1, \dots, d_n) \cup DO(d_1, \dots, d_n)$  kan en anden orientering  $D_2 \in DE(d_1, \dots, d_n) \cup DO(d_1, \dots, d_n)$  af  $G$  opnåes ved at orientere alle kanter i  $G$ , der svarer til en kant i  $H$ , modsat af deres orientering i  $H$ , og resten af kanterne i  $G$  orienteres samme vej som deres modsvarende kanter i  $D_1$ . Denne orientering  $D_2$  vil være et element i  $DE(d_1, \dots, d_n) \cup DO(d_1, \dots, d_n)$  fordi de  $n$  punkter i  $D_2$  vil have samme udvalenser som de tilsvarende  $n$  punkter i  $D_1$ , nemlig  $d_1, \dots, d_n$ , hvilket er en konsekvens af konstruktionen af  $D_2$ . Ethvert punkt  $v_i \in D_1 \oplus D_2$  har nemlig udvalens = indvalens =  $q_i$ , så at det tilsvarende punkt i  $D_2$  vil have udvalens  $q_i + (d_i - q_i) = d_i$ , idet de  $q_i$  kanter der går ind til punktet  $v_i$  i

$D_1 \oplus D_2$  orienteres modsat i  $D_2$ , og de  $d_i - q_i$  kanter som går ud fra  $v_i$  i  $D_1$  og som ikke er i  $D_1 \oplus D_2$  orienteres samme vej som i  $D_1$ . Dette beviser at et  $D_2$  opnået udfra en Eulersk delgraf  $H$  af  $D_1$  er et element i  $DE(d_1, \dots, d_n) \cup DO(d_1, \dots, d_n)$ . Afbildningen  $D_2 \rightarrow D_1 \oplus D_2$  er dermed også på og dermed en bijektion.

Hvis  $D_1$  er lige, afbildes lige orienteringer over i Eulerske delgrafer af  $D_1$  med lige kanttal og ulige orienteringer over Eulerske delgrafer med ulige kanttal. Hvis  $D_1$  er til gengæld er ulige afbildes lige orienteringer over i delgrafer med ulige kanttal og ulige orienteringer over i delgrafer med lige kanttal. Pga. at  $D_2 \rightarrow D_1 \oplus D_2$  også er en bijektion har vi således

$$\left| |DE(d_1, \dots, d_n)| - |DO(d_1, \dots, d_n)| \right| = |EE(D_1) - EO(D_1)|$$

som sammenholdt med Lemma 5.3.3 fuldender beviset for korollaret.  $\square$

Lemma 5.3.2 medfører således at  $\bar{f}_G \equiv 0$ . Men ifølge Korollar 5.3.4 er koefficienten til  $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$  i  $f_G$  forskellig fra nul pga. antagelsen om at  $EE(D) \neq EO(D)$ . Idet graden af hvert  $x_i$  i ovenstående led i  $f_G$  er  $d_i$ , vil den førnævnte gradnedsættelsesproces vha. (5.5) ikke have indflydelse på leddet. Ydermere opstår der ikke andre led af denne type ved gradnedsættelsen, thi led der har fået nedsat grader vil have en gradsum skarpt mindre end  $|E(G)|$  til forskel fra leddet  $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$ . At leddet ikke ændres af de anvendte operationer og at der ikke opstår nye led med samme grader  $d_i$  for alle  $i$ , betyder at dets koefficient i  $\bar{f}_G$  er identisk med dets koefficient i  $f_G$ , og at koefficienten dermed ikke er nul.

Dette strider mod det før opnåede resultat at  $\bar{f}_G \equiv 0$ . Antagelsen om ikke-listefarvelighed af  $D$  i starten af beviset er således forkert, og  $D$  er derfor  $(d_D^+(v) + 1)$ -listefarvelig.  $\square$

Hvis  $D$  er acyklisk, er  $EE(D) = 1$  (idet enhver graf uden kanter er Eulersk) og  $EO(D) = 0$  (idet enhver kant i en Eulersk graf er med i en kreds). Alon og Tarsi's sætning giver således direkte at

$D$  kan  $(d^+(x) + 1)$ -listefarves.

## 5.4 En anvendelse af Alon-Tarsis resultat

I [9] leverer H. Fleischner M. Stiebitz løsningen til et farvningsproblem stillet af P. Erdős, i form af følgende sætning:

**Sætning 5.4.1.** *Lad  $n$  være et positivt heltal og lad  $G$  være en 4-regulær graf med  $3n$  punkter. Antag at  $G$  kan opdeles i en Hamiltonkreds og  $n$  parvis punktdisjunkte trekanter. Så er  $\chi(G) = 3$ .*

**Definition 5.4.2.** Lad  $D$  være en orienteret graf. En kantmængde  $E^* \subseteq E(D)$  kaldes en *Eulersk kantmængde*, hvis den er kantmængden i en Eulersk delgraf af  $D$ .

Der defineres følgende mængde:

$$\varepsilon(D) = \{E^* \subseteq E(D) : E^* \text{ er en Eulersk kantmængde i } D\}$$

Hertil knyttes tallet

$$e(D) = \varepsilon(D)$$

Et system  $S$  af ikke-tomme, orienterede delgrafer i en orienteret graf  $D$ , givet ved  $S = \{D_1, \dots, D_m\}$ ,  $m \geq 1$ , kaldes en *opdeling* af  $D$  hvis og kun hvis

$$E(D) = \bigcup_{i=1}^m E(D_i), \text{ og } E(D_i) \cap E(D_j) = \emptyset, 1 \leq i < j \leq m$$

*Notation.* Hvis  $a$  er en orienteret kant i en orienteret graf  $D$ , skrives der  $a^R$  for den modsatrettede kant af  $a$ , dvs.  $a = (x, y) \Leftrightarrow a^R = (y, x)$ . Hvis  $A \subseteq E(D)$  skrives der  $A^R$  for mængden af kanter der de modsatrettede kanter af  $A$ , altså  $A^R = \{a^R : a \in A\}$ . Med notationen  $A(x : D)$ ,  $x \in V(D)$  menes mængden af alle kanter i  $E(D)$  der enten går ind til  $x$  eller ud fra  $x$ . Af og til er



det nødvendigt at markere, at visse elementer tælles med og andre ikke tælles med i en mængde som f.eks  $\varepsilon$  ovenfor. Således betegner

$$\varepsilon = \varepsilon(D, a_1, \dots, a_p, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_q, x_1, \dots, x_r, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_s)$$

mængden af alle Eulerske kantmængder  $E^* \in \varepsilon(D)$  som opfylder:  $a_i \in E^*$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $b_i \notin E^*$ ,  $i = 1, \dots, q$ ,  $A(x_i : D) \subseteq E^*$ ,  $i = 1, \dots, r$ , og  $A(y_i : D) \cap E^* = \emptyset$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Derudover sættes

$$e(D, a_1, \dots, a_p, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_q, x_1, \dots, x_r, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_s) = |\varepsilon|.$$

Følgende lemma svarer til Korollar 1.6 i [9] og bygger på Alons og Tarsis resultat.

**Lemma 5.4.3.** *Hvis  $G$  er en  $2k$ -regulær graf ( $k \geq 1$ ) med  $p$  punkter og som har en Eulersk orientering  $D$  som opfylder  $e(D) \equiv 2 \pmod{4}$ , og hvis  $pk$  er lige så er  $\chi(G) \leq \hat{\chi}(G) \leq k + 1$ .*

*Bevis.* Bemærk først at Eulerske delgrafer af orienterede, Eulerske grafer optræder i par;  $(D_1, \bar{D}_1), \dots, (D_n, \bar{D}_n)$ , thi fjernes en Eulersk delgraf fra en Eulersk graf vil der fra hvert punkt være fjernet lige så mange indgående kanter som udgående. Restgrafene vil da også være Eulerske.

Bemærk endvidere at antallet af kanter er lige, pga. valens-sumformlen og fordi  $pk$  er lige;  $p \cdot 2k = 2 \cdot |E(G)| \Rightarrow |E(G)| = pk$ . Men da kanttallet er lige og da Eulerske delgrafer af Eulerske grafer optræder i par, må der gælde at  $EE(D)$  er lige og at  $EO(D)$  er lige.

Dvs. at hvis  $EE(D) = EO(D) = 2q$  er  $EE(D) + EO(D) = 4q \equiv 0 \pmod{4}$ . Heraf følger at hvis  $EE(D) + EO(D) \equiv 2 \pmod{4}$  må  $EE(D) \neq EO(D)$ . Lemmaet følger så af Sætning 5.3.1.  $\square$

**Lemma 5.4.4.** *Lad  $D$  være en orienteret, Eulersk graf, og lad  $C$  være en énsrettet kreds i  $D$  med  $m$  kanter.*

Sæt  $D_1 = (D - E(C)) \cup E(C)^R$ , og definer en afbildning  $\varphi$  ved  $\varphi(E^*) = (E^* - E(C)) \cup (E(C) - E^*)^R$  for alle  $E \in \varepsilon(D)$ . Da gælder

$$D_1 \text{ er en orienteret, Eulersk graf.} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \text{Afbildningen } \varphi \text{ er en bijektion fra } \varepsilon(D) \text{ på } \varepsilon(D_1), \\ \text{og } e(D) = e(D_1). \end{aligned} \quad (5.8)$$

*Bevis.* 5.7 ses ved, at ved fjernelse af kanterne i en Eulersk delgraf af en Eulersk graf, lader en restgraf tilbage hvor alle punkter opfylder at indvalens er lig udvalens. 5.8 indses påfølgende vis: Lad  $E^* \in \varepsilon(D)$ . Sæt  $D' = (V(D), E^*)$  og  $D'_1 = (V(D), \varphi(E^*))$ .  $D'$  ses at være en orienteret, Eulersk graf. Det skal først vises at  $D'_1$  er Eulersk. Lad  $x \in V(D)$ . Hvis  $x \notin V(C)$ , følger det af definitionen af  $\varphi(E^*)$  at  $d_{D'_1}^+(x) = d_{D'}^+(x) = d_{D'}^-(x) = d_{D'_1}^-(x)$ . Antag nu at  $x \in V(C)$ . Lad  $a_1 \in E(C)$  være en kant der udgår fra  $x$ , og lad  $a_2 \in E(C)$  være en kant der går ind til  $x$ . Der må gælde at  $a_i \in E^* \Leftrightarrow a_i^R \notin \varphi(E^*)$ ,  $i = 1, 2$ . Dvs. at  $d_{D'_1}^+ = d_{D'_1}^-$ .  $D'_1$  må således være Eulersk, så at  $\varphi(E^*) \in \varepsilon(D_1)$ , og det ses at  $\varphi$  er en bijektion fra  $\varepsilon(D)$  på  $\varepsilon(D_1)$ .  $\square$

**Sætning 5.4.5.** *Lad  $D$  være en orienteret, Eulersk graf. Antag at  $D$  kan opdeles i en énsrettet Hamiltonkreds, og  $n \geq 0$  parvis punktdisjunkte, énsrettede trekanten, der er kantdisjunkte med Hamiltonkredsen. Så er  $e(D) \equiv 2 \pmod{4}$ .*

*Bevis.* (Induktion over antallet af trekanten,  $n$ ). For  $n = 0$  er  $D$  blot en kreds, og  $E_1 = \emptyset$  og  $E_2 = E(D)$  er de to eneste Eulerske kantmængder i  $D$ . Så er  $(D) = 2$  som forventet.

Lad nu  $n \geq 1$ , og antag at sætningen er sand for enhver orienteret, Eulersk graf som kan opdeles i en Hamiltonkreds og  $k < n$  parvis punktdisjunkte trekanten. Lad  $D$  være en orienteret, Eulersk graf der kan opdeles i en Hamiltonkreds  $C$ , og  $n$  parvis

disjunkte trekanter. Lad  $T$  være én af trekanterne i opdelingen, og lad  $x_1$ ,  $x_2$  og  $x_3$  betegne punkterne i  $T$ , hvor  $a_1 = (x_3, x_2)$ ,  $a_2 = (x_1, x_3)$  og  $a_3 = (x_2, x_1)$  er kanterne i  $T$ .

Definer  $e^*(D)$  ved

$$e^*(D) = e(D, \bar{a}_1, a_2, a_3) + e(D, a_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) + e(D, a_1, \bar{a}_2, a_3) \\ + e(D, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_3) + e(D, a_1, a_2, \bar{a}_3) + e(D, \bar{a}_1, \bar{a}_2, a_3) \quad (5.9)$$

Det ses at

$$e(D) = e(D, a_1, a_2, a_3) + e(D, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) + e^*(D) \quad (5.10)$$

idet højresiden af (5.10) er summen af Eulerske delgrafer af  $D$  fordelt på samtlige mulige inklusioner og eksklusioner af kanterne  $a_1$ ,  $a_2$  og  $a_3$ .

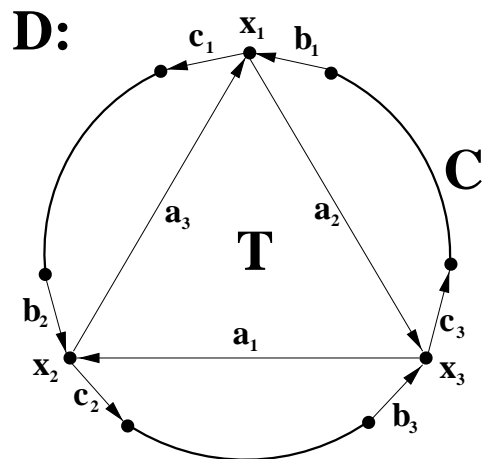
Sæt nu  $D' = D - E(T)$ . Da  $E(T)$  er en Eulersk kanmængde i  $D$  er  $e(D') = e(D, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) = e(D) = e(D, a_1, a_2, a_3)$ . Induktionshypotesen medfører at  $e(D') \equiv 2 \pmod{4}$ , og dermed er  $e(D, a_1, a_2, a_3) \equiv e(D, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) \equiv 2 \pmod{4}$ . Sammen med (5.10) giver dette

$$e(D) \equiv e^*(D) \pmod{4} \quad (5.11)$$

Det skal nu blot vises at  $e^*(D) \equiv 2 \pmod{4}$ . Hertil benyttes 3 orienterede grafer,  $D'_1$ ,  $D'_2$ , og  $D'_3$  som konstrueres ud fra  $D$ , og på hvilke induktionshypotesen kan anvendes.

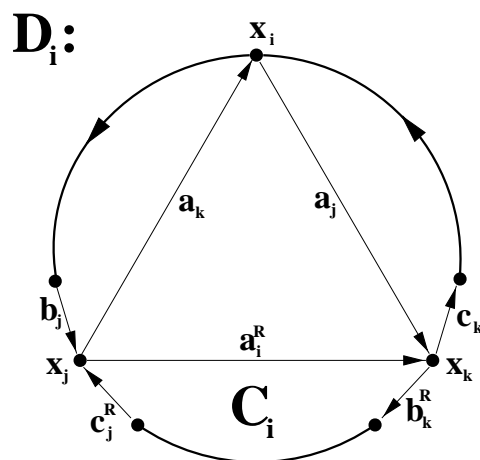
Betragt nu  $T$ 's punkter  $x_1$ ,  $x_2$ , og  $x_3$ . For  $i = 1, 2, 3$  benævner  $x_i^+$  efterfølgeren til  $x_i$  på  $C$ , og  $x_i^-$  forgængerens til  $x_i$  på  $C$ . Pga Lemma 5.4.4 kan det antages at  $C$  er (ensrettet) orienteret i retning fra  $x_1$  til  $x_2$ , fra  $x_2$  til  $x_3$ , og fra  $x_3$  til  $x_1$ , som vist i figur 5.3. Lad  $C_i$  betegne den éntydigt bestemte ensrettede kreds som opfylder  $a_i \in E(C_i) \subseteq E(C) \cup \{a_i\}$ .  $C_1$ ,  $C_2$ , og  $C_3$  ses at være kantdisjunkte.

I det følgende betegner  $(i, j, k)$  en af triplerne  $(1, 2, 3)$ ,  $(2, 3, 1)$ , eller  $(3, 1, 2)$ .



Figur 5.3: Skitse af grafen  $D$ , med markering af kredsen  $C$  og trekanten  $T$  bestående af punkterne  $x_1, x_2$ , og  $x_3$ , og kanterne  $a_1, a_2$ , og  $a_3$ .

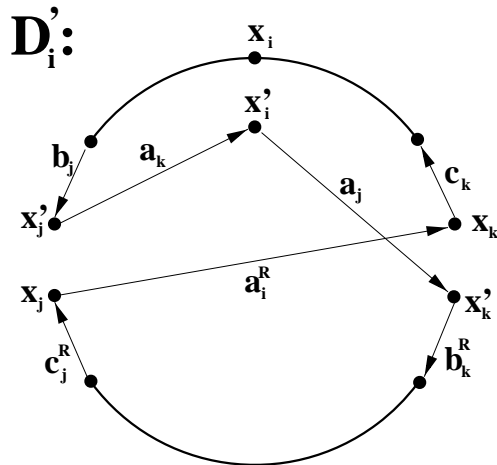
Først defineres  $D_i$  til at være den orienterede graf opnået fra  $D$  ved at vende orienteringen af  $C_i$ , dvs. at  $D_i = (D - E(C_i)) \cup E(C_i)^R$  som angivet på figur 5.4.



Figur 5.4: Skitse af grafen  $D_i$  som er opnået ud fra grafen  $D$  fra figur 5.3 ved at vende orienteringen af en kreds som herved bliver til kredsen  $C_i$ .

Herefter konstrueres en graf  $D'_i$  ud fra  $D_i$  ved at fjerne kanterne  $a_j, a_k, b_j$ , og  $b_k^R$ , og opsplitte punkterne  $x_i, x_j$ , og  $x_k$  i to punkter hver, så at der opstår 3 nye punkter;  $x'_i, x'_j$ , og  $x'_k$ .

Den orienterede graf  $D'_i$  opnås ved tilsidst at sætte  $a_j = (x'_i, x'_k)$ ,  $a_k = (x'_j, x'_i)$ ,  $b_j = (x_j^-, x'_j)$ , og  $b_k^R = (x'_k, x_k^-)$ , og lade resten af elementerne i grafen være uændrede. Den resulterende graf  $D'_i$  er skitseret i figur 5.5. Bemærk at  $D'_i$  via denne konstruktion er en



Figur 5.5: Skitse af grafen  $D'_i$  som er opnået udfra grafen  $D_i$  fra figur 5.4 ved at fjerne nogle kanter, splitte punkterne  $x_i$ ,  $x_j$ , og  $x_k$ , og tilføje nogle nye kanter.

orienteret, Eulersk graf som kan opdeles i en Hamiltonkreds og  $(n - 1)$  parvis punktdisjunkte trekantede, og induktionshypotesen kan således anvendes herpå til at opnå

$$e(D'_1) \equiv e(D'_2) \equiv e(D'_3) \equiv 2 \pmod{4} \quad (5.12)$$

hvilket medfører at

$$e(D'_1) + e(D'_2) + e(D'_3) \equiv 2 \pmod{4} \quad (5.13)$$

Da  $d^-(x'_i) = d^+(x'_i) = 1$  er det klart at en vilkårlig Eulersk kantmængde  $E^* \in \varepsilon(D'_i)$  enten indeholder enten begge kanterne  $a_j$  og  $a_k$ , eller ingen af disse. For  $(i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$  vil der således gælde at

$$\begin{aligned} e(D'_i) &= e(D'_i, a_i^R, a_j, a_k) + e(D'_i, \bar{a}_i^R, \bar{a}_j, \bar{a}_k) \\ &\quad + e(D'_i, \bar{a}_i^R, a_j, a_k) + e(D'_i, a_i^R, \bar{a}_j, \bar{a}_k) \end{aligned} \quad (5.14)$$

I det følgende afviges der fra originalbeviset i [9], og der bringes istedet et lettere læseligt sammendrag af de anvendte principper.

Der findes først omskrivninger af de 4 led på højresiden i (5.14).

Det ses at

$$e(D, \bar{a}_i, a_j, a_k) = e(D_i, a_i^R, a_j, a_k) = e(D'_i, a_i^R, a_j, a_k) \quad (5.15)$$

-hvor første lighedstegn følger af Lemma 5.4.4 hvor “den vendte kreds” er  $C_i$ . Andet lighedstegn følger af konstruktionen af  $D'_i$  udfra  $D_i$ . Man kan ligeledes overbevise sig om at

$$e(D, a_i, \bar{a}_j, \bar{a}_k) = e(D_i, \bar{a}_i^R, \bar{a}_j, \bar{a}_k) = e(D'_i, \bar{a}_i^R, \bar{a}_j, \bar{a}_k) \quad (5.16)$$

og

$$\begin{aligned} e(D'_i, a_i^R, \bar{a}_j, \bar{a}_k) &= e(D', \bar{x}_j, x_k) \\ &= e(D', x_i, \bar{x}_j, x_k) + e(D', \bar{x}_i, \bar{x}_j, x_k) \end{aligned} \quad (5.17)$$

hvor det bl.a. benyttes at valensen af  $x_i$  er 2, og

$$\begin{aligned} e(D'_i, \bar{a}_i^R, a_j, a_k) &= e(D', x_j, \bar{x}_k) \\ &= e(D', \bar{x}_i, x_j, \bar{x}_k) + e(D', \bar{x}_i, x_j, \bar{x}_k) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Nu haves

$$\begin{aligned} e(D'_i) &= e(D, \bar{a}_i, a_j, a_k) + e(D, a_i, \bar{a}_j, \bar{a}_k) \\ &\quad + e(D', x_i, \bar{x}_j, x_k) + e(D', \bar{x}_i, \bar{x}_j, x_k) \\ &\quad + e(D', \bar{x}_i, x_j, \bar{x}_k) + e(D', \bar{x}_i, x_j, \bar{x}_k) \end{aligned}$$

hvor  $e(D'_i) = 2 \pmod{4}$

□

Sættes

$$\begin{aligned} m &= e(D'_1) + e(D'_2) + e(D'_3) \\ &\equiv 2 \pmod{4} + 2 \pmod{4} + 2 \pmod{4} \\ &\equiv 2 \pmod{4} \end{aligned}$$

fås at (hvor  $e(D, a_1, a_2, a_3) = e(D, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) \equiv 2 \pmod{4}$ )

$$\begin{aligned} m &= e(D) - e(D, a_1, a_2, a_3) - e(D, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) \\ &\quad + 4(e(D', x_1, x_2, \bar{x}_3) + e(D', x_1, \bar{x}_2, x_3) + e(D', x_1, x_2, \bar{x}_3)) \end{aligned}$$

hvor den sidste linje naturligtvis giver 0 mod 4.

Alt i alt fås at  $e(D) \equiv 2 \pmod{4}$ , og Lemma 5.4.3 medfører ikke blot Sætning 5.4.1, nemlig at grafen er 3-farvelig, men at den faktisk er 3-listefarvelig.

Historisk:

At knytte det listekromatiske tal for en graf til antallet af Eulerske delgrafer med lige og ulige antal kanter i en orientering af grafen, er en idé af Alon og Tarsi fra lige før 1990. Den blev dog først publiceret i 1992 i [8].

Metoden vakte stor opsigt fordi det var en ny måde at betragte farvningsteori på, dels ved at relatere til orienteringer, dels ved at opnå listefarvningsresultater idet der i perioden mellem Erdős-Rubin-Taylors artikel [1] fra 1979 og Alon-Tarsis artikel, ikke blev offentliggjort nogen listefarvningsartikler.

Fleischner og Stiebitz brugte Alon og Tarsis metode i [9] før offentligørelsen af [8]. Da Fleischner og Stiebitz i [9] løste et problem som var blevet stillet af P. Erdős med en tilhørende dusør for løsningen på US\$100, kunne de således hver indkassere en check på US\$50, og endnu vigtigere, de kunne efter udbetalingen af beløbet indramme checken med Paul Erdős' underskrift! Denne sidste lille anekdote er taget fra *Zimaths Volume 1 Issue 3*, "Solving a problem posed by Paul Erdős", hvor H. Fleischner fortæller om selve processen i løsning af et problem af Erdős.



# Kapitel 6

## Kant-listefarvning. Galvins Sætning.

I dette kapitel drejer det sig ikke længere kun om simple grafer, idet der her også behandles kant-listefarvninger, og to kanter med éns endepunkter derfor vil have betydning for en farvning. Det antages dog at at graferne ikke har sløjfer.

### 6.1 Galvins Sætning

I det følgende bevises Galvins sætning, se [14].

**Definition 6.1.1.** Lad  $D$  være en orienteret graf. Ved en *kerne* i  $D$  forstås en uafhængig mængde  $K \subseteq V(D)$  hvorom gælder at for alle  $v \in V(D) \setminus K$  eksisterer der et punkt  $u \in K$  så at  $v \rightarrow u$ , altså en uafhængig mængde som alle punkter udenfor mængden har en orienteret kant ind til.

**Lemma 6.1.2.** *Lad  $D$  være en orienteret graf, hvor enhver induceret delgraf af  $D$  har en kerne.  $D$  er da  $(d^+() + 1)$ -listefarvelig.*

*Bevis.* Da  $D$  er  $(d^+() + 1)$ -listefarvelig hvis og kun hvis hver sammenhængskomponent i  $D$  er  $(d^+() + 1)$ -listefarvelig, kan  $D$  antages at være sammenhængende. Der anvendes induktion over antallet af punkter i  $D$ ,  $|V(D)|$ .

For  $|V(D)| = 1$  består  $D$  kun af et enkelt punkt (med udvalens nul), som let ses at kunne 1-listefarves.

For  $|V(D)| = n$  antages lemmaet at være sandt for grafer med højst  $n - 1$  punkter. Lad for hvert punkt  $v \in V(D)$   $S(v)$  angive en vilkårlig, fast liste af  $d^+(v) + 1$  farver, som er knyttet til punktet  $v$ . Vælg en vilkårlig farve  $c \in \bigcup_{v \in V(D)} S(v)$ , altså en farve som forekommer i mindst én af listerne hørende til punkterne i  $D$ . Sæt  $S = \{v \in V(D) : c \in S(v)\}$  og lad  $K$  være kernen i  $S$ . Betragt nu delgraf  $D' = D[V(D) \setminus K]$  af  $D$ . Sæt  $S'(v) = S(v) - \{c\}$  for alle  $v \in V(D')$ . Det ses at alle punkter  $v \in D'$  har lister  $S'(v)$  af længde mindst  $d^+(v) + 1$ .  $D'$  kan derfor iflg. induktionsantagelsen listefarves mht. listerne  $S'(v)$ ,  $v \in D'$ . Denne listefarvning af delgraf  $D' \subseteq D$  kan udvides til en farvning af hele  $D$ , thi alle punkterne i  $K = V(D) \setminus V(D')$  kan farves med  $c$  idet  $K$  er en uafhængig punktmængde i  $D$ , og farven  $c$  ikke blev anvendt til farvning af punkter i  $V(D) \setminus K$ .  $\square$

Heraf følger

**Korollar 6.1.3.** *Lad  $D$  være en orienteret graf med maximum udvalens på  $n - 1$ , i hvilken enhver induceret delgraf har en kerne.  $D$  er da  $n$ -listefarvelig.*

Hermed kan vi nu bevise

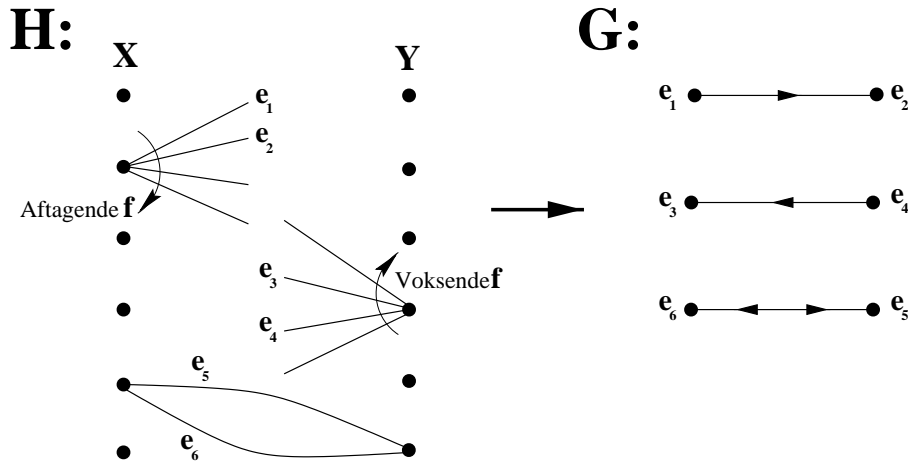
**Sætning 6.1.4 (Galvins Sætning).** *Lad  $H$  være en 2-delt multigraf, og lad  $G = L(H)$  være liniografen for  $H$ , og antag at  $G$  er  $n$ -farvelig. Så er  $G$   $n$ -listefarvelig.*

*Bevis.* Sæt  $V = V(G) = E(H)$  og lad  $(X, Y)$  betegne 2-delningen af  $H$ .

For  $x \in V(H)$  kaldes mængden  $\{v \in V : v \text{ er incident med } x\}$  en *række* hvis  $x \in X$  og en *søjle* hvis  $x \in Y$ . To elementer i  $V$  er således *adjacente*<sup>1</sup> hvis de er i samme række, i samme søjle,

<sup>1</sup>Dvs. nabopunkter, betragtet som elementer i  $V(G)$ , eller kanter incidente med det samme punkt, betragtet som elementer i  $E(H)$

eller eventuelt begge dele (2 kanter med identiske endepunkter siges at være *parallelle*). For  $v \in V$  betegnes rækken og søjlen indeholdene  $v$  for hhv.  $R(v)$  og  $C(v)$ . Lad  $f : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$



Figur 6.1: Figuren illustrerer orienteringsprocessen for linjegrafen  $G = L(H)$ . To kanter der er incidente med et punkt i  $X$  (dvs. i samme række) orienteres fra højeste farve til laveste, og omvendt for kanter incidente med samme punkt i  $Y$ . Farvningen af kanterne  $e_1$  til  $e_6$  i  $H$  opfylder  $f(e_1) > f(e_2)$ ,  $f(e_3) < f(e_4)$ , og  $f(e_5) \neq f(e_6)$  (det indbyrdes størrelsesforhold mellem farverne af  $e_5$  og  $e_6$  er ligegyldigt, da de 2 modsatrettede orienteringer placeres på samme kant.)

være en  $n$ -farvning af  $G$  (og dermed også en  $n$ -kant-farvning af  $H$ ).  $f$  er således 1-1 på hver række og hver søjle. Lad  $D$  være en orientering af  $G$ , således at  $u \rightarrow v$  hvis enten  $R(u) = R(v)$  og  $f(u) > f(v)$  eller hvis  $C(u) = C(v)$  og  $f(u) < f(v)$ , altså så at  $u \rightarrow v$  hvis kanterne  $u, v \in V$  er incidente med det samme punkt i  $X$  og  $u$ 's farve har højere værdi end  $v$ 's, eller hvis kanterne  $u$  og  $v$  er incidente med det samme punkt i  $Y$  og  $u$ 's farve har lavere værdi end  $v$ 's. I tilfælde af at kanternes 2 endepunkter er identiske vil orienteringen af kanten mellem deres tilhørende punkter i linjegrafen  $G$  være orienteret begge veje. Orienteringsprocessen ses iøvrigt illustreret i figur 6.1.

Det ses nu at  $d^+(v) < n$  for hvert  $v \in V$ , hvilket følger af at  $f$  er 1-1 på hver række og hver søjle. Thi et vilkårligt punkt  $v \in V(G)$

der har fået tildelt farven  $f(v) = i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , vil højest have  $i - 1$  udadrettede kanter til punkter i  $R(v)$  (pga. orienteringen fra større farve mod mindre), og højest  $n - i$  udadrettede kanter til punkter i  $C(v)$  (orientering fra mindre mod større farve), altså ialt højest  $(i - 1) + (n - i) = n - 1$  udadrettede kanter.

Pga. Korollar 6.1.3 er det nu nok at vise at enhver induceret delgraf  $D'$  af  $D$  har en kerne. Det vises således ved induktion over  $|V(D')|$ ,  $V(D') \subseteq V$ , at  $V(D')$  har en kerne.

Givet en induceret delgraf  $D'$  af  $D$ , sættes

$$T = \{v \in V(D') : \forall u \in R(v) \cap V(D'), u \neq v : f(v) < f(u)\}$$

Dvs.  $T$  dannes ved fra hver række i  $D'$  at medtage elementet med den mindste farveværdi. Alle punkter i  $V(D') \setminus T$  er forbundet med et punkt i  $T$  med en kant orienteret ind mod  $T$ , hvilket følger af orienteringsreglen “fra større mod mindre farveværdi” for rækker i  $V$ .

For  $|V(D')| = 1$  ses det enlige punkt  $v \in V(D')$  trivielt at udgøre en kerne i  $D'$ , hvilket viser basistilfældet. Der kan nu gåes videre til induktionsskridtet, hvor  $D'$  antages at have en kerne når  $|V(D')| \leq n - 1$ .

Lad  $|V(D')| = n$ . Hvis  $T$  er en uafhængig mængde er  $T$  en kerne i  $D'$ . Antag derfor at  $T$  ikke er uafhængig, så at der eksisterer to punkter  $v_1, v_2 \in T$ , hvor  $v_1 \rightarrow v_2$ , hvilket betyder at  $v_1$  og  $v_2$  er i samme søjle idet der i  $T$  kun er ét element fra hver søjle. Da  $v_1$  og  $v_2$  er i samme søjle, må der gælde at  $f(v_1) < f(v_2)$ . I søjlen  $C(v_1) = C(v_2)$  må der være et punkt,  $v_0 \in V(D')$ , med mindste farveværdi blandt punkterne i  $C(v_1) \cap V(D')$ , hvor  $v_0 \neq v_2$ , men eventuelt  $v_0 = v_1$ .

Betragt nu grafen  $D' - v_0$ . Denne graf må ifølge induktionsantagelsen have en kerne. Lad derfor  $K$  være en kerne i  $D' - v_0$ . Hvis  $v_2 \in K$ , ses det at  $K$  også er en kerne i  $D'$ , idet  $C(v_0) = C(v_2)$  og dermed  $f(v_0) < f(v_2)$ . Hvis derimod  $v_2 \notin K$  må der eksistere et element  $e \in K$ , så at  $v_2 \rightarrow e$ . Men så må der gælde at

1.  $C(v_2) = C(e)$  og  $f(v_2) < f(e)$ , og/eller
2.  $R(v_2) = R(e)$  og  $f(v_2) > f(e)$ .

I første tilfælde vil der således gælde at  $v_0 \rightarrow e$ , thi  $f(v_0) < f(v_2) < f(e)$ , og  $K$  er dermed en kerne i  $D'$ .

Det andet tilfælde viser sig slet ikke at kunne forekomme, idet  $v_2 \in T$ , så at der gælder at  $\forall e \in R(v_2) : f(v_2) < f(e)$ .

Det er dermed bevist at der for enhver orientering  $D$  af  $G$ , udført på den ovenfor beskrevne måde, gælder at enhver induceret delgraf  $D'$  af  $D$  har en kerne, så at sætningen følger af Korollar 6.1.3.  $\square$

Galvins Sætning er her fremstillet som et resultat om  $n$ -kantlistefarvelighed af 2-delte multigrafer. Men rent faktisk gælder resultatet i en stærkere form, nemlig at  $G$  er  $(kn : k)$ -listefarvelig for alle  $k \in \mathbf{N}$ , hvis  $H$  er en 2-delt multigraf og  $G = L(H)$ .

## 6.2 En skærpelse af Galvins Sætning

Følgende sætning er en svækket udgave af Sætning 3 i [15]. Den er til gengæld en skærpelse af Galvins Sætning som fremstillet i afsnit 6.1. Beviset er stort set det samme som for Galvins Sætning, og forskellen består i at man i stedet for en vilkårlig  $n$ -farvning af lineigrafen  $G = L(H)$  (dvs. en kant- $n$ -farvning af den 2-delte graf  $H$ ) vælger en "smartere"  $n$ -farvning af  $G$  som medfører at alle udvalenser i orienteringen  $D$  af  $G$  (med samme metode som i beviset for Galvins Sætning), bliver  $d_G^+(e) < \max\{d_H(x), d_H(y)\}$ , hvor  $e = xy$  er en kant i  $H$  med endepunkter  $x$  og  $y$  og dermed et punkt i  $G$ . Dette ses at medføre at  $H$  kan kant- $f()$ -listefarves, hvor  $f(e) = \max\{d_H(x), d_H(y)\}$  for  $e = xy \in E(H)$ .

**Sætning 6.2.1.** *Lad  $H$  være en 2-delt multigraf. Definer for alle kanter  $e = xy \in E$  afbildningen  $f \mapsto \mathbf{N} \cup \{0\}$  ved  $f(e) = \max\{d_H(x), d_H(y)\}$ .  $H$  er da kant- $f()$ -listefarvelig.*

*Bevis.* Lad  $G = L(H)$  være lineigrafen af  $H$ , og sæt  $V = E(H) = V(G)$ . Det er nok at påvise at:

(i)  $G$  har en orientering  $D$  så at

$$d_D^+(e) < \max\{d_H(x), d_H(y)\},$$

for alle  $e \in V$ , og at

(ii) Enhver induceret delgraf  $D'$  af orienteringen  $D$  af  $G$  har en kerne.

Resultatet følger da af Lemma 6.1.2.

Da isolerede punkter ikke har nogen indflydelse på kantfarvning af en graf, kan det antages at  $H$  er uden isolerede punkter. Kaldes 2-delingen af  $H$  for  $(X, Y)$  kan det antages at  $|X| \leq |Y|$ .

Det vises ved induktion efter  $|V|$  at  $G$  har en farvning  $\varphi$  så at der for orienteringen  $D$  af  $G$  med samme metode som i beviset for Galvins Sætning gælder at  $d_D^+(e) < \max\{d_H(x), d_H(y)\}$ , for alle  $e \in V$ .

For  $E(H) = 1$  består  $H$  af 2 punkter,  $x$  og  $y$ , som er forbundet med en kant,  $e = xy$ , og  $G$  består blot af ét enkelt punkt. Den éntydige orientering  $D$  af  $G$  vil ligeledes blot være ét punkt, da der ikke er nogen kanter at orientere. Derfor er  $\max\{d_H(x), d_H(y)\} = 1$ , og  $d_D^+(e) = 0$ , og udsagnet er sandt i dette tilfælde.

Antag at udsagnet er sandt for alle mindre kanttal end  $|V| \geq 1$ . Lad nu  $M$  være en maksimum pardannelse i  $H$ . Følgende mærkningsprocedure udføres nu på  $H$ 's punkter:

**Initialisering** Sæt

$$X' = \{x \in X \mid x \text{ er ikke endepunkt i en kant i } M\}.$$

Alle punkter i  $X'$  mærkes.

**Step 1** Alle punkter i  $Y$  som er forbundet til et mærket punkt mærkes.

**Step 2** Alle umærkede punkter i  $X$  som er forbundet til et mærket punkt i  $Y$  med en kant fra pardannelsen  $M$  mærkes.

**Step 3** Hvis der er umærkede punkter i  $Y$  som er forbundet til mærkede punkter i  $X$ , så gå til Step 1.

Bemærk at alle punkter i  $Y$  der mærkes er endepunkter i pardannelsen  $M$ , pga. at det er en maksimum pardannelse. Kaldes mængden af de umærkede punkter i  $Y$ , der ikke er endepunkter i kanter fra  $M$  for  $Y'$ , ses det at  $|X'| \leq |Y'|$  idet  $|X| \leq |Y|$ .

Sæt

$$X'' = \{x \in X \mid x \text{ er et umærket endepunkt i en kant fra } M\}$$

og sæt

$$Y'' = \{y \in Y \mid y \text{ er et umærket endepunkt i en kant fra } M\}$$

Det ses at  $X'' \neq \emptyset$ . Dette skyldes at hvis  $X' = \emptyset$  er der ingen mærkede punkter, og hvis  $X' \neq \emptyset$  er  $Y' \neq \emptyset$ , så at punkterne i  $Y'$  må være forbundet til mærkede punkter i  $X$ , hvilket er i modstrid med at  $M$  er en maksimum pardannelse.

Lad  $M''$  være kanterne fra  $M$  hvis endepunkter ikke er mærkede.  $M'' \neq \emptyset$ , thi  $X'' \neq \emptyset$ . Pr. induktion har grafen  $G'' = L(H - M'')$  en farvning  $\varphi''$  som muliggør en orientering  $D''$  med samme metode som i beviset for Galvins Sætning, og som opfylder  $d_{D''}^+(e) < \max\{d_{H-M''}(x), d_{H-M''}(y)\}$ ,  $e = xy \in V$ .

Kanterne i  $M''$  kan nu farves med en ny farve med større værdi end alle farver i  $\varphi''$  så at der opnås en kant-farvning af hele  $H$ ,  $\varphi$ .

Udfra farvningen  $\varphi$  af elementerne i  $V$  dannes nu orienteringen  $D$  af  $G$ . Det skal påvises at  $d_D^+(e) < \max\{d_H(x), d_H(y)\}$  for alle  $e = xy \in V$ .

For et element  $e = xy \in V \setminus M''$  (altså en kant i  $H$  der ikke har endepunkter i  $(X'' \cup Y'')$ ) vil der gælde at

$$\begin{aligned} d_D^+(e) &= d_{D''}^+ < \max\{d_{H-M''}(x), d_{H-M''}(y)\} \\ &= \max\{d_H(x), d_H(y)\} \end{aligned}$$

som ønsket.

For en kant  $e = xy$  med ét endepunkt  $x$  i  $X''$  og det andet,  $y$ , i  $Y \setminus Y''$  vil der gælde at  $d_H(x) = d_{H-M''}(x) + 1$ , og  $d_D^+(e) = d_{D''}^+(e)$ , så at

$$\begin{aligned} d_D^+(e) &= d_{D''}^+(e) < \max\{d_{H-M''}(x), d_{H-M''}(y)\} \\ &= \max\{d_H(x), d_H(y)\} \end{aligned}$$

igen som ønsket.

Tilfældet hvor en kant  $e = xy$  i  $H$  har endepunkt  $x \in X \setminus X''$  og endepunkt  $y \in Y''$  kan ikke forekomme pga. mærkningsproceduren.

For en kant  $e = xy$  med endepunkter  $x \in X''$  og  $y \in Y''$ , men  $e \notin M''$  haves at  $d_D^+(e) = d_{D''}^+(e) + 1$  da orienteringsproceduren foreskriver orientering fra mindre mod større farveværdi i  $Y$ -siden. Hermed haves

$$\begin{aligned} d_D^+(e) &= d_{D''}^+(e) + 1 < \max\{d_{H-M''}(x), d_{H-M''}(y)\} + 1 \\ &= \max\{d_H(x), d_H(y)\} \end{aligned}$$

idet  $d_H(x) = d_{H-M''}(x) + 1$  og  $d_H(y) = d_{H-M''}(y) + 1$ , og det ønskede er igen opnået. Bemærk at argumentet også gælder selvom  $e$  er en parallelkant til en kant i  $M''$  der også har endepunkter  $x$  og  $y$ .

Nu mangler vi blot at undersøge om kanterne i  $M''$  og deres endepunkter opfylder valenskravene. For  $e = xy \in M''$  medfører orienteringsreglen "fra mindre mod større" i  $X$ -siden at

$$\begin{aligned} d_D^+ &= d_{H-M''}(x) \\ &= d_H(x) - 1 \\ &< d_H(x) \\ &\leq \max\{d_H(x), d_H(y)\} \end{aligned}$$

som er det ønskede.



Hermed er (i) bevist. (ii) følger af at orienteringsmetoden fra beviset for Galvins Sætning blev anvendt i dannelsen af  $D$ , og at beviset for at enhver induceret delgraf af  $D$  har en kerne således er det samme som i beviset for Galvins Sætning, hvorefter Lemma 6.1.2 kan anvendes.  $\square$

## 6.3 Totalfarvning

Det følgende er hovedsagligt hentet fra [13, side 86-89]

**Definition 6.3.1.** En *totalfarvning* af en graf  $G$  er en tildeling af farver til alle elementer i  $V(G) \cup E(G)$ , så at nabopunkter får forskellig farve, kanter incidente med det samme punkt får forskellig farve, og punkter der indgår i en kan har farve forskellig fra kantens farve. Det mindste antal farver der skal bruges til at totalfarve en graf  $G$  kaldes det *total-kromatiske tal*,  $\chi''(G)$ .

Følgende formodning om de total-kromatiske tal kan nu formuleres:

**Formodning 6.3.2.** For en simpel graf  $G$  er

$$\chi'' \leq \Delta(G) + 2$$

Et resultat der ligner Formodning 6.3.2 kan nu opnås på følgende måde:

Givet en graf  $G$  kan punkterne i grafen farves med  $\chi(G)$  farver. Kald mængden af de anvendte farver for  $C = \{1, \dots, \chi(G)\}$ . Enhver kant  $e = xy \in E(G)$ ,  $x, y \in V(G)$  kan nu tildeles en liste  $S(e)$  af farver ved

$$S(e) = C \setminus \{\varphi(x), \varphi(y)\}$$

-hvor  $\varphi(x)$  og  $\varphi(y)$  betegner hhv. farven af  $x$  og farven af  $y$ . Hvis  $|C| - 2 \geq \hat{\chi}'(G)$  kan enhver kant  $e \in E(G)$  således farves med en

farve fra sin liste  $S(e)$ , og en farvning af hele grafen  $G$  er opnået. Hermed har vi argumenteret for

**Observation 6.3.3.** *Lad  $G$  være en (multi-) graf. Da er*

$$\chi''(G) \leq \widehat{\chi}'(G) + 2$$

□

Iflg. Brooks' Sætning (Sætning 2.1.1) er enhver todelt (multi-) graf  $B_{a,c}$ , hvor  $a + c \geq 3$ ,  $\Delta(B_{a,c})$ -farvelig, og vi har således som konsekvens af ovenstående og af Galvins Sætning (Sætning 6.1.4) følgende

**Observation 6.3.4.** *Lad  $B_{a,c}$  være en todelt multigraf og sæt  $\Delta = \Delta(B_{a,c})$ . Da er*

$$\chi''(B_{a,c}) \leq \Delta + 2$$

□

Bemærk at Observation 6.3.4 også gælder for de todelte grafer  $K_1$  og  $K_2$ , idet  $\chi''(K_1) = 1 < 0 + 2$  og  $\chi''(K_2) = 3 \leq 1 + 2$ .

Historisk:

Formodningen  $\widehat{\chi}'(G) = \chi'(G)$  for *alle* multigrafer  $G$  er den såkaldte *Listefarvningsformodning* (eller på engelsk *the List-coloring Conjecture, LCC*) og er fremsat uafhængigt af flere (Vizing var den første); V. G. Vizing (1975), R. P. Gupta, M. O. Albertson og K. L. Collins.

Formodningen blev trykt første gang i B. Bollobás, A. J. Harris, List-colorings of graphs, *Graphs Combin.* **1**, 115-127, 1985. (Se T. R. Jensen, B. Toft, *Graph Coloring Problems*, John Wiley & Sons 1995, side 20.)

J. Dinitz formodede i 1978 at  $\widehat{\chi}'(K_{n,n}) = n$ , altså et specialtilfælde af Listefarvningsformodningen. Denne formodning blev bevist F. Galvin i 1995 (se Sætning 6.1.4, Galvins Sætning, tidligere i kapitlet), og beviset var overraskende simpelt og byggede kun på allerede kendte resultater.

Galvins resultat vakte stor opsigt, men alligevel er det ikke senere lykkedes at vise formodningen for flere klasser af grafer.



# Kapitel 7

## Uløste problemer og konklusion

### 7.1 To relaterede problemer omkring $(am : m)$ -listefarvelighed

**Definition 7.1.1.** Lad der til en graf  $G$  være givet to tal,  $a, b \in \mathbf{N}$ ,  $a \geq b$ . Hvis det for enhver tildeling af lister  $S(v)$ ,  $v \in V(G)$ , af længde  $a$  er muligt at udvælge en delmængde af størrelse  $b$  fra listen for ethvert punkt i  $G$ , så at de udvalgte  $b$ -delmængder for ethvert par af nabopunkter er disjunkte, siges  $G$  at være  $(a : b)$ -listefarvelig.

Det ses at “almindelig”  $k$ -listefarvelighed kan opfattes som  $(k : 1)$ -listefarvelighed og Definition 7.1.1 er dermed en udvidelse af det almindelige listefarvningsbegreb.

Et af de ældste uløste listefarvningsproblemer er følgende (fremsat af Erdős, Rubin og Taylor i [1]):

Hvis en graf  $G$  er  $(a : b)$ -listefarvelig, er  $G$  så også  $(am : bm)$ -listefarvelig?

Man kan vælge en lidt simplere version af ovenstående:

**Uløst Problem 1.** Hvis en graf  $G$  er  $(a : 1)$ -listefarvelig, er  $G$  så også  $(am : m)$ -listefarvelig?

Ser vi på specialtilfældet  $m = 2$  i Problem 1, kan vi prøve at løse denne del af problemet.  $G$  vil således til ethvert punkt have

tilknyttet en liste af længde  $2a$ . Man kunne så starte med at splitte listen op i 2 lister af længde  $a$ , for derefter at tildele hvert punkt et farvepar  $(q, r)$  hvor  $q$  tages fra første liste og  $r$  fra den anden. Dette kan gøres såat alle nabopunkter  $x, y \in V(G)$  har forskellige førstefarver, og forskellige andenfarver:

$$\begin{array}{l} x : \{ \quad q \quad | \quad s \quad \} \\ y : \{ \quad r \quad | \quad t \quad \} \end{array}$$

Dette kunne jo godt ligne en løsning, idet alle naboer  $x$  og  $y$  har fået tildelt farvepar  $(q, s)$  hhv.  $(r, t)$  hvor  $q \neq r$  og  $s \neq t$ . Problemet er bare at det ikke kan afvises at f.eks.  $q = t$ . Der er således *ikke* tale om en løsning, idet del-listerne  $\{q, s\}$  og  $\{r, t\}$  ikke nødvendigvis er disjunkte.

Et problem der er nært beslægtet med Problem 1 er

**Uløst Problem 2.** Lad  $G$  være en graf. Hvis

$$\begin{aligned} G &= H_1 \cup H_2 \\ V(G) &= V(H_1) = V(H_2) \\ E(G) &= E(H_1) \cup E(H_2) \\ \widehat{\chi}(H_1) &= k_1 \\ \widehat{\chi}(H_2) &= k_2 \end{aligned}$$

gælder der så at  $G$  er  $(k_1 k_2)$ -listefarvelig?

Hvis det blot drejede sig om almindelig farvning i Problem 2 var løsningen let nok: Da  $H_1$  og  $H_2$  er hhv.  $k_1$ - og  $k_2$ -farvelige kan  $G$ 's punkter først  $k_1$ -farves, og dernæst  $k_2$ -farves. Ethvert punkt  $v \in V(G)$  har nu fået tildelt et farvepar  $(q_v, r_v)$ , hvor  $q_v \in \{1, \dots, k_1\}$  og  $r_v \in \{1, \dots, k_2\}$ . Dette farvepar kan opfattes som en farve i mængden  $\{1, \dots, k_1\} \times \{1, \dots, k_2\}$ . Da  $|\{1, \dots, k_1\} \times \{1, \dots, k_2\}| = k_1 k_2$  og da to nabopunkter i  $G$  vil have forskellige farvepar er  $G$  således  $k_1 k_2$ -farvelig.

Hvis nu svaret til Problem 1 var ja, så at  $(a : 1)$ -listefarvelighed medførte  $(am : m)$ -listefarvelighed, ville vi have følgende:

Lad  $G$ ,  $H_1$  og  $H_2$  være som givet i Problem 2. Da  $H_1$  er  $(k_1 : 1)$ -listefarvelig er  $H_1$  også  $(k_1 k_2 : k_2)$ -listefarvelig. For vilkårlige lister af længde  $(k_1 k_2)$  hørende til hvert punkt i  $G$  kan man nu udvælge del-lister af længde  $k_2$ , sådan at ethvert par af punkter der er forbundet med en kant i  $H_1$  får tildelt  $k_2$ -lister der er indbyrdes disjunkte. Fra hver af  $k_2$ -listerne kan der nu udvælges 1 element, så at ethvert par af punkter der er naboer i  $H_2$  får tildelt forskellige farver. Da nabopunkter i  $G$  enten er naboer i  $H_1$  eller  $H_2$ , er der hermed udvalgt et element fra hver  $(k_1 k_2)$ -liste så at nabopunkter i  $G$  får forskellige farver. Da  $(k_1 k_2)$ -listerne var vilkårlige er  $G$  dermed  $(k_1 k_2)$ -listefarvelig.

## 7.2 Listefarvningsformodningen

**Uløst Problem 3.** Er  $\widehat{\chi}'(G) = \chi'(G)$  ?

Listefarvningsformodningen (LCC) siger at svaret til Problem 3 er ja. Denne formodning har vi beskæftiget os med i Kapitel 6, hvor den blev bevist for todelte grafer vha. Galvins Sætning (Sætning 6.1.4).

## 7.3 Er $\widehat{\chi}''(G) = \chi''(G)$ ?

Følgende problem er formuleret som en formodning i [15]:

**Uløst Problem 4.** Er  $\widehat{\chi}''(G) = \chi''(G)$  ?

I [15] leveres også følgende sætning som skyldes A. V. Kostochka:

**Sætning 7.3.1 (Theorem A (b) i [15]).** Hvis  $G$  er en multigraf med maksimumvalens  $\Delta = \Delta(G)$ , så er

$$\chi''(G) \leq \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor, \text{ når } \Delta \geq 4$$

Beviset for sætningen angives at være langt og kompliceret, men til gengæld angives også en svækket version af Sætning 7.3.1 (Hvis  $G$  er en multigraf med maksimumvalens  $\Delta \geq 2$ , så er  $\chi''(G) \leq \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor + 1$ ) med bevis. Det vil således være naturligt at prøve at finde en øvre grænse for  $\widehat{\chi}''(G)$  udtrykt ved  $\Delta(G)$ , for at se om formodningen lyder sandsynlig. En sådan generel øvre grænse gives i

**Sætning 7.3.2 (fra Theorem D i [15]).** *Hvis  $G = (V, E)$  er en multigraf med maksimumvalens  $\Delta$ , så er*

$$\widehat{\chi}''(G) \leq \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor + 2$$

Formodningen om at  $\widehat{\chi}'(G) = \chi'(G)$  er således ikke helt usandsynlig, selvom ovenstående langt fra er et éntydigt tegn herfor.

## 7.4 Forholdet mellem farvnings- og listefarvningsproblemer. Et oplæg til konklusionen

Stort set alle farvningsproblemer har en listefarvningsvariant, og løsningen til et listefarvningsproblem behøver langt fra altid at ligne løsningen til det oprindelige farvningsproblem både hvad angår metode og resultat.

I [16] argumenterer Jensen og Toft for at  $\widehat{\chi}(G)$ , det listekromatiske tal for en graf  $G$ , til trods for sit navne- og notationsmæssige slægtskab med det kromatiske tal  $\chi(G)$ , er en helt anden slags graf-invariant end det kromatiske tal.

Jensen og Toft ser på følgende sætning af N. Alon og en kæde af uligheder:

**Sætning 7.4.1 (Theorem A i [16]).** *Der eksisterer en funktion  $f : \mathbf{N} \mapsto \mathbf{N}$ , så at for enhver graf  $G$  er*

$$\max_{H \subseteq G} \text{av. degree}(H) \leq f(\widehat{\chi}(G)) \tag{7.1}$$



Ovenstående sætning medfører at hvis  $\max_{H \subseteq G} \text{av.degree}(H)$  går mod uendelig, vil  $\widehat{\chi}(G)$  også gå mod uendelig. Kæden af uligheder er

$$\begin{aligned} \chi(G) &\leq \widehat{\chi}(G) \\ &\leq \max_{H \subseteq G} \delta(H) + 1 \\ &\leq \max_{H \subseteq G} \text{av.degree}(H) + 1 \\ &\leq \Delta(G) + 1 \end{aligned} \tag{7.2}$$

De tre midterste invarianter er som følge af Sætning 7.4.1 og (7.2) enten alle begrænsede eller alle ubegrænsede. Betragt nu grafen bestående af alle punkter i planen, hvor to punkter er forbundet hvis og kun hvis de har afstand 1 til hinanden. Dette er *enhedsafstandsgrafen i planen*  $G$ , og det vides at  $4 \leq \chi(G) \leq 7$ . Man kan nu spørge om  $\widehat{\chi}(G)$  er endelig eller uendelig (et problem fremsat af D. Johnson Jr.). Det viser sig faktisk at  $\widehat{\chi}(G)$  ikke er endelig. Thi der kan konstrueres en følge  $G_d$  af delgrafer af  $G$  ved følgende algoritme:

Lad  $G_2$  være en 4-kreds som er en delgraf af  $G$ . Kopieres  $G_2$  og skubbes kopien en distance på 1 i en vilkårlig retning, og forbindes kopihjørnepunkterne med deres originalpunkter, opnås en 3-regulær delgraf  $G_3$  af  $G$ . Sådan fortsættes der med dannelse af  $G_d$  udfra  $G_{d-1}$ . Via. induktion opnås en endelig,  $d$ -regulær delgraf  $G_d^1$  af  $G$ .

Denne konstruktion viser at  $G$  indeholder endelige delgrafer,  $G_d$ , med vilkårligt stor minimumvalens, og dermed vilkårligt stor  $\max_{H \subseteq G_d} \delta(H)$ . Dette betyder ifølge Sætning 7.4.1 at  $G$  også indeholder delgrafer med vilkårligt stort listekromatisk tal.  $G$  kan således ikke selv have endeligt listekromatisk tal.  $\square$

---

<sup>1</sup> $G_d$  kaldes *den d-dimensionale terning*.

## 7.5 Konklusion

I dette speciale viser visse resultater og observationer, bl.a. Brooks' Sætning (Sætning 2.1.1) og betragtningen af farvning som specialtilfælde af listefarvning, at  $\widehat{\chi}(G)$  opfører sig som  $\chi(G)$ , mens andre resultater, såsom forskelligheden af det listekromatiske tal og det kromatiske tal for todelte grafer og for visse plane grafer, antyder at ligheder mellem  $\widehat{\chi}(G)$  og  $\chi(G)$  slet ikke er det typiske.

Især eksemplerne med 2-kromatiske (todelte) grafer der kan have vilkårligt højt listekromatisk tal i Kapitel 3, og konstruktionen af den  $d$ -dimensionale terning, der medfører ikke-endelighed af det listekromatiske tal for enhedsafstandsgraphen i planen i forgående afsnit, viser gravérende forskelle (endelighed og ikke-endelighed) på de to invarianters talmæssige opførsel.

Også på bevissiden er der forskelle; her tænker jeg på C. Thomassens ubesværede og elegante bevis for 5-listefarvelighed sammen med M. Voigts, om ikke enkle, så overkommelige påvisning af eksistensen af en plan graf der ikke er 4-listefarvelig, i kontrast til K. Appels, W. Hakens og til dels J. Kochs bevis for 4-farvesætningen som inkluderer den kontroversielle anvendelse af computerassistance (se [10], 273-274). Dette er således et eksempel på et listefarvningsproblem der ikke blev nær så gammelt som det tilsvarende farvningsproblem<sup>2</sup>.

I afsnit 7.1 fremstilles et hidtil uløst listefarvningsproblem, Problem 2, hvis farvningspendant er nem at løse.

Den større kompleksitet af listefarvning i forhold til farvning, og det faktum at det listekromatiske tal har egenskaber der ligger tæt op ad valensrelaterede grafinvarianters egenskaber, er således stærke grunde til at opfatte  $\widehat{\chi}(G)$  som en anderledes grafinvariant end  $\chi(G)$ , og ikke blot som en variant heraf.

---

<sup>2</sup>4-farveproblemet formuleres første gang i 1852 i et brev fra Augustus de Morgan, se [10], s. 270.

# Notation og symbolliste

$\emptyset_{graf}$	den tomme graf
$C_n$	kreds med $n$ punkter
$K_n$	komplet graf med $n$ punkter
$G - v$	sletning af punkt
$G - e$	sletning af kant
$G - H$	fjernelse af delgraf
$G \cup E$	tilføjelse af kantmængde
$G \cup V$	tilføjelse af punktmængde
$G_1 \cup G_2$	forening af grafer
$d(v), d_G(v)$	valens af $v$ i $G$
$d^+(v), d^-(v)$	udvalens, indvalens
$N(v)$	nabomængden til $v$
$\Delta(G)$	maksimumvalens
$\delta(G)$	minimumvalens
$\chi(G)$	det kromatiske tal
$\chi'(G)$	det kant-kromatiske tal
$\chi''(G)$	det total-kromatiske tal
$\widehat{\chi}(G)$	det liste-kromatiske tal
$\widehat{\chi}'(G)$	det kant-liste-kromatiske tal
$\widehat{\chi}''(G)$	det kant-total-kromatiske tal



# Litteratur

- [1] *Proceedings of the West Coast Conference on combinatorics, Graph Theory and Computing. Sep 5-7, 1979.* Winnipeg Utilitas Mathematica Publishing Inc. P. Erdős, A. L. Rubin, H. Taylor, Choosability in graphs, 125-157.
- [2] R. Graham, M. Grötschel og L. Lovász, *Handbook of Combinatorics*, Elsevier Science B.V. 1995, kap. 4: B. Toft, *Colouring, Stable Sets and Perfect Graphs*.
- [3] B. Toft, *The subgraph of a critical graph spanned by the minorvertices*, Håndskrevne noter, 23 sider.
- [4] D. Hanson, G. MacGillivray og B. Toft, Choosability of bipartite graphs, *Ars Combinatoria* **44** (1996), 183-192.
- [5] C. Thomassen, Every planar graph is 5-choosable, *Journal of Combinatorial Theory*, series B **62** (1994), 180-181.
- [6] R. Graham, M. Grötschel og L. Lovász, *Handbook of Combinatorics*, Elsevier Science B.V. 1995, kap. 5: C. Thomassen, *Embeddings and Minors*.
- [7] N. Alon, Restricted colorings of graphs, *London Mathematical Society Lecture Note Series*. **187**. *Surveys in Combinatorics, 1993*, 1-33.
- [8] N. Alon, M. Tarsi, Colorings and orientations of graphs, *Combinatorica* **12** (1992), 125-134

- [9] H. Fleischner, M. Stiebitz, A solution to a colouring problem of P. Erdős, *Discrete Mathematics* **101** (1992), 39-48
- [10] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall 1996.
- [11] M. Mirzakhani, A small non-4-choosable planar graph, *Bulletin of the ICA*, Volume **17** (1996), 15-18.
- [12] M. Voigt, List colourings of planar graphs, *Discrete Mathematics* **120** (1993), 215-219.
- [13] T. R. Jensen og B. Toft *Graph Coloring Problems*, John Wiley & Sons 1995.
- [14] F. Galvin, The list chromatic index of a bipartite multigraph, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **63**, 153-158 (1995).
- [15] O. V. Borodin, A. V. Kostochka, D. R. Woodall, List edge and list total colourings of multigraphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 27 sider.
- [16] T. R. Jensen og B. Toft, Choosability versus chromaticity, *Geombinatorics*, Volume **V(2)** 45-64 (1995).